ВАЉЕВСКА
ГИМНАЗИЈА

14000 ВАЉЕВО, ВУКА КАРАЏИЋА 3
ТЕЛ-ФАКС: 014/221-622; ТЕЛ:014/227-927
e-mail gimvaljevo@ptt.rs
www.valjevska gimnazija.edu.rs

Predrag Stojaković – profesor Valjevske gimnazije

FIZIKA 8

Zbirka zadataka iz fizike – priprema za takmičenje

prvi deo

oscilacije, talasi, geometrijska optika, električno polje

INTERNA SKRIPTA

za osmi razred osnovne škole

SADRŽAJ

1.Matematičko klatno ----------1

1.Matematičko klatno – rešenja ---------- 4

2. Oscilacije ----------11

2. Oscilacije – rešenja ---------- 12

3. Talasi ---------- 15

3. Talasi – rešenja ----------15

4. Doplerov efekat ----------21

4. Doplerov efekat – rešenja ----------22

5. Odbijanje svetlosti ----------26

5.1.Ravna ogledala ---------- 26

5.1.Ravna ogledala – rešenja ---------- 28

5.2 Sferna ogledala ----------32

5.2. Sferna ogledala – rešenja ---------- 34

6. Prelamanje svetlosti ----------40

6. Prelamanje svetlosti – rešenja ---------- 43

7. Električno polje----------51

7.1 Kulonov zakon ----------51

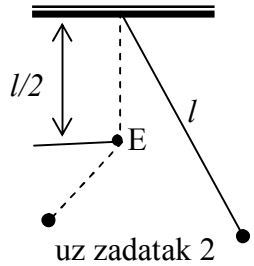
7.1 Kulonov zakon rešenja ----------58

7.2 Jačina i potencijal električnog polja ----------53

7.2 Jačina i potencijal električnog polja ----------64

1. Matematičko klatno

1. Dva matematička klatna jednovremeno osciluju. Za isto vreme jedno napravi 15 oscilacija a drugo 10 oscilacija. Nađi odnos dužina klatna. (**Rez.:** 4/9)



uz zadatak 2

2. Matematičko klatno dužine 1,5 m osciluje i na svom putu nailazi na ekser E koji se nalazi na vertikali ispod tačke vešanja na rastojanju $l/2$. Naći period ovakvog klatna.($g = 9{,}81$ m/s^2) (**Rez.:** $T \approx 2{,}1$ s)

3. Matematičko klatno dužine 66 cm okačeno je tako da njegova nit prolazi između dva eksera od kojih se jedan nalazi na 30 cm, a drugi na 50 cm ispod tačke vešanja. Naći period oscilacija ovog klatna. ($g = 9{,}81$ m/s^2) (**Rez.:** $T \approx 1$ s)

4. Matematičko klatno dužine l se nalazi u liftu koji se kreće naviše ubrzanjem a. Naći period oscilovanja ovog klatna. (**Rez.:** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$)

5. Matematičko klatno dužine l se nalazi u liftu koji se kreće naniže ubrzanjem a. Naći period oscilovanja ovog klatna. U jednom trenutku uže koje drži lift se prekine. Opisati kretanje klatna. (**Rez.:** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$)

6. Matematičko klatno dužine l osciluje u vodi gustine ρ_0. Gustina kuglice klatna je ρ ($\rho > \rho_0$). Izračunati period ovog klatna. Analizirati slučaj ako je $\rho < \rho_0$. (**Rez.:** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\left(1-\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}}$)

7. Matematičko klatno dužine l nalazi se u vagonu koji se kreće u horizontalnom pravcu ubrzanjem a. Koliki je period ovog klatna? (**Rez.:** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$)

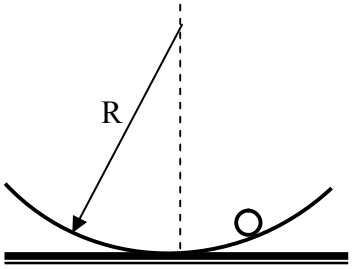
8. Matematičko klatno dužine 1 m ($g = 9{,}81$ m/s^2) osciluje u vertikalnoj ravni. Ispod klatna je ogledalo u horizontalnoj ravni.
a) Koliko vremena protekne između dva momenta u kojima je udaljenost klatna od njegovog lika najmanja.
b) Isto to samo je ogledalo iznad klatna takođe vodoravno.
c) Sada je ogledalo u vertikalnoj ravni, dovoljno udaljeno da ga kuglica ne razbije.
(**Rez.:** T = 2 s, a) 1s; b) 1s; c) 2 s)

9. U nepokretnoj kabini lifta osciluje matematičko klatno sa periodom T_0. Kolikim ubrzanjem treba da se podiže lift da bi period bio $T_0/2$. (**Rez.:** a = 3g)

10. U nepokretnoj kabini lifta osciluje matematičko klatno sa periodom $T_0 = 1$ s. Kolikim ubrzanjem i u kom smeru treba da se kreće lift da bi za 2,5 minuta klatno napravilo 100 oscilacija.
(**Rez.:** a = 0,56 g; lift ubrzava naniže)

11. Matematičko klatno dužine l skrati se za 36 cm. Pri tom je period oscilovanja 4/5 od početnog. Kolika je dužina klatna? (**Rez.:** 100 cm)

12. Kuglica malih dimenzija nalazi se unutar sferne površine poluprečnika 0,981 m koja leži na horizontalnom stolu. Izračunati frekvenciju malih oscilacija kuglice. (**Rez.:** 0,503 Hz; uputstvo: postoji potpuna sličnost kretanja ove kuglice sa kuglicom matematičkog klatna)



uz zadatak 12

13. Dva klatna razlikuju se po dužini za 16 cm. Jedno klatno napravi 10 a drugo 6 oscilacija za isto vreme. Kolike su dužine klatna? (**Rez.:** 25 cm i 9 cm)

14. Od konca dužine 3,15 metara treba da se naprave 3 matematička klatna, pri čemu je period jednog klatna dva puta manji od drugog a dva puta veći od trećeg. Kolike su dužine tih klatna?
(**Rez.:** 2,4 m; 0,6 m; 0,15 m)

15. Naći razliku broja oscilacija u toku 24 h klatna časovnika koje radi na površini Zemlje gde je g = 9,81 m/s^2 i na planini visine gde je g = 9,80 m/s^2. Dužina klatna je 0,25 m. (**Rez.:** 45 oscilacija)

16. Časovnik sa klatnom radi tačno na Zemlji. Šta bi pokazivao ovaj časovnik na Mesecu? (g_Z = 9,81 m/s^2, g_M = 1,65 m/s^2). Tj. koliko će časova otkucati (pokazati) klatno na Mesecu za 24 Zemaljska sata?
(**Rez.:** Pokazaće 9,84 h. Uputstvo: naći koliko puta je period klatna duži na Mesecu nego na Zemlji; toliko puta će manje pokazati časova)

17. Časovnik sa klatnom radi tačno u Beogradu gde je g_B = 9,8060 m/s^2. Kolika će biti greška časovnika u Sarajevu gde je g_S = 9,8051 m/s^2 za 24 sata (Beogradska)?
(**Rez.:** kasni 4 s; Uputstvo: vidi uputstvo prethodnog zadatka.)

18. **a)** Usled zagrevanja dužina klatna se poveća za 0,1 %. Kolika je greška časovnika za 24 h?
b) Analizirati pokazivanje sata ako se dužina klatna smanji za 0,1% ?
(**Rez.:** a) kasni 43 sekunde; Uputstvo: vidi uputstvo kod prethodna dva zadatka; oprez! nova dužina klatna je 1,001 dužine starog u prvom slučaju b) žuri 43 sekunde)

19. Dva matematička klatna imaju jednake dužine po 1 m. Kuglica jednog klatna se podigne do tačke vešanja i pusti. Kuglica drugog klatna otkloni za neki ugao i pusti. Koja kuglica će pre stići u ravnotežni položaj? (**Rez.:** prva (koja pada) 0,45s ; druga 0,5 s)

20. Dva matematička klatna, čije su dužine 64 cm i 36 cm, počinju istovremeno oscilovanje iz ravnotežnog položaja u istom smeru. Posle koliko vremena će ponovo istovremeno proći kroz ravnotežne položaje sa istim smerom kretanja? (**Rez.:** posle 4,81 s)

21. Kada se dužina matematičkog klatna smanji za 30 cm, njegov period oscilovanja se prepolovi. Koliki je bio period pre skraćivanja? (**Rez.:** T = 1,268 s)

22. Dva klatna nalaze se u liftu koji se kreće vertikalno naviše ravnomerno ubrzano. Dužina jednog klatna je za 46 cm veća od drugog. U toku jednog minuta jedno klatno izvrši 40 a drugo 30 oscilacija.
a) odrediti dužine oba klatna b) Odrediti ubrzanje lifta.
(**Rez.:** 59,14 cm; 105,14 cm; 0,366 m/s^2)

23. Odrediti za koliko će se razlikovati pokazivanja časovnika sa klatnom na površini Zemlje i na visini 5 km iznad površine Zemlje. Poluprečnik Zemlje je 6400 km.
(**Rez.:** Onaj na visini kasni za oko 67 sekundi)

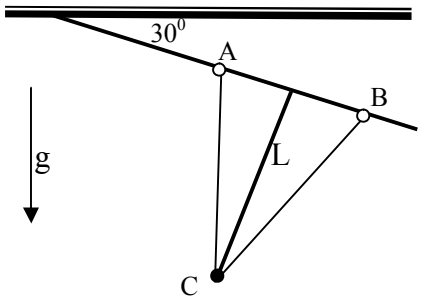
24. Za koliko procenata treba promeniti dužinu matematičkog klatna, da bi period oscilovanja na visini 10 km bio jednak periodu na površini Zemlje? Poluprečnik Zemlje iznosi 6400 km.
(**Rez.:** za 0,3% smanjiti**)**

25. Časovnik sa klatnom radi tačno na visini 2,5 km. Za koliko će časovnik odstupati od tačnog vremena u toku 24 h na površini Zemlje? Poluprečnik Zemlje iznosi 6400 km. (**Rez.:** 35 s – napreduje)

26. Nit jednog od matematičkih klatana je za 0,15 m duža od niti drugog. Za vreme dok prvo klatno napravi 7 oscilacija drugo napravi jednu oscilaciju više. Naći periode oscilovanja oba klatna.
(**Rez.**: 1,4 s; 1,6 s)

27. Naći period malih oscilacija matematičkog klatna dužine 25 cm, ako se njegova tačka vešanja kreće ubrzanjem intenziteta g usmerenim pod uglom 120^0 u odnosu na smer gravitacionog ubrzanja.
(**Rez.:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\sqrt{3}}} = 0{,}76\ s.$**)**

28. Koliki je period oscilovanja kuglice C, koja je preko lakih šipki povezana preko osovinica u tačkama A i B kao na slici. Šipka na kojoj se nalaze tačke A i B je pod uglom 30^0 u odnosu na horizontalu. Dužina klatna iznosi L.
(**Rez.:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g\sqrt{3}}}$ **)**



uz zadatak 28

Valjevska gimnazija

1.Matematičko klatno - rešenja

1. $n_1 = 15$ osc; $n_2 = 10$ osc; $L_1/L_2 = ?$

Periodi oba klatna data su formulom : $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$ i $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$ Odnos dužina klatna dobićemo delenjem obe strane:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$$

periodi su takođe dati definicijom T = t/n, pa količnik daje:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{t}{n_1}}{\frac{t}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2}{3}$$

upoređivanjem dobijamo

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{4}{9}$$

2. Ovaj slučaj razmatramo kao dva klatna, desno osciluje kao klatno dužine L sa periodom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2*3{,}14\sqrt{\frac{1{,}5m}{9{,}81m/s^2}} = 2{,}46s$$

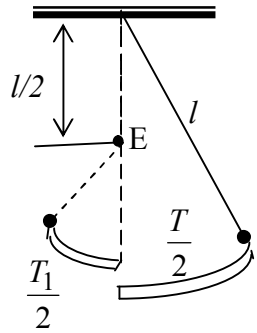
Levo osciluje kao klatno dužine L/2:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L/2}{g}} = 2*3{,}14\sqrt{\frac{0{,}75m}{9{,}81m/s^2}} = 1{,}74s$$

U opštim brojevima bi bilo ovako:

$$T_{uk} = \frac{T}{2} + \frac{T_1}{2} = \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} + 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}\right)$$

$$\Rightarrow T_{uk} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



uz zadatak 2

Rastojanje od ravnežnog položaja do krajnjeg i natrag je pola perioda. Znači ukupan period ovog složenog klatna je:

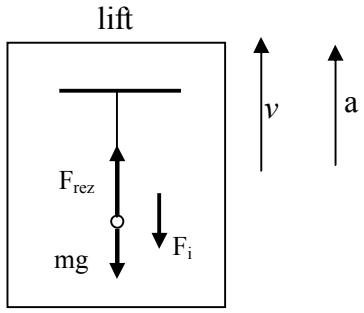
$$T_{uk} = \frac{T}{2} + \frac{T_1}{2} = \frac{2{,}46}{2} + \frac{1{,}74}{2} = 2{,}1s.$$

3. Ovaj zadatak je sličan prethodnom. Sa jedne strane klatno osciluje kao klatno dužine 66cm – 30cm = **36 cm = L_1**. sa druge strane osciluje kao klatno dužine 66 cm – 50 cm = **16 cm = L_2**.
Ako se primeni formula za matematičko klatno

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad T_1 = 1{,}2 \text{ s.} \quad T_2 = 0{,}8 \text{ s.} \quad T_{uk} = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = 1\ s.$$

4. Lift predstavlja ubrzani sistem – neinercijalni sistem.

U neinercijalnim sistemima na tela deluje sila inercije usmerena nasuprot ubrzanja.



uz zadatak 4

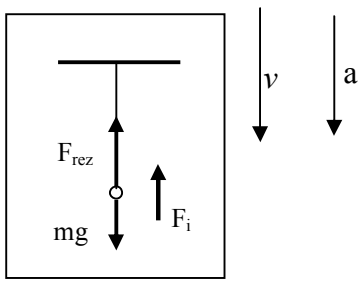
Sila inercije je $F_i = ma$

Najbolje je crtati klatno u trenutku prolasku kroz ravnotežni položaj.
Na slici se vidi da je $F_{rez} = mg + F_i$ tj $F_{rez} = mg + ma$ $\quad F_{rez} = m(g + a)$

Dalje razmišljamo ovako: Matematičko klatno se nalazi na nekoj novoj planeti na kojoj je **ubrzanje g_1 = g + a** a sila teže **F = mg_1**
Zato je period ovog matematičkog klatna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$$

5. Opet je u pitanju neinercijalni sistem. Sila inercije deluje suprotno od ubrzanja.
sada je ravnoteža postignuta ako je $F_{rez} + F_i = mg$ $\Rightarrow$



uz zadatak 5

$F_{rez} = m(g - a)$
sada nova planeta ima ubrzanje teže $\mathbf{g_1 = g - a}$

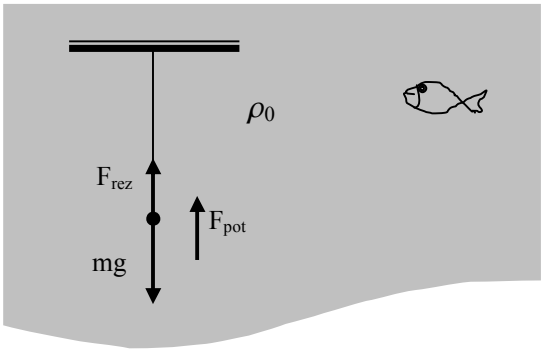
Period ovog klatna je $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g-a}}$

Ako se uže prekine lift je u slobodnom padu, a = g.
Rezultujuća sila je $F_{rez} = m(g - g) = 0$! Klatno se nalazi u bestežinskom stanju. Nema povratne sile i klatno neće oscilovati.
Zanimljivo je analizirati dalju sudbinu klatna. Tu moramo pozvati u pomoć Prvi Njutnov zakon. Ako se klatno zatekne u krajnjem položaju (u trenutku kidanja užeta) tada klatno miruje (v = 0) i ostaće u stanju mirovanja. Ako se zatekne kad prolazi kroz ravnotežni položaj, tada je brzina maksimalna, znači stalna i klatna nastavlja da se kreće ravnomerno.

6. Opet je najbolje crtati klatno pri prolasku kroz ravnotežni položaj. Sada na kuglicu klatna deluje sila potiska $F_p = \rho_0 gV$
Ravnoteža nastupa ako je $F_{rez} + F_p = mg$
$F_{rez} = mg - \rho_0 gV$
Treba silu napisati u obliku $F_{rez} = ma$. Zato ćemo izvući zajednički član ispred zagrade

$F_{rez} = mg\left(1 - \dfrac{\rho_0 V}{m}\right)$ masu kuglice u zagradi zamenićemo izrazom $m = \rho V$

$F_{rez} = mg\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)$ Vidi se da nova planeta ima ubrzanje teže



uz zadatak 6

$g_1 = g\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)$ tako da će period klatna biti

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}}$

Zanimljivo je uraditi slučaj $\rho > \rho_0$ Tada je sila potiska veća od sile Zemljine teže i slika će biti okrenuta "naglavačke". Period je

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g\left(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1\right)}}$

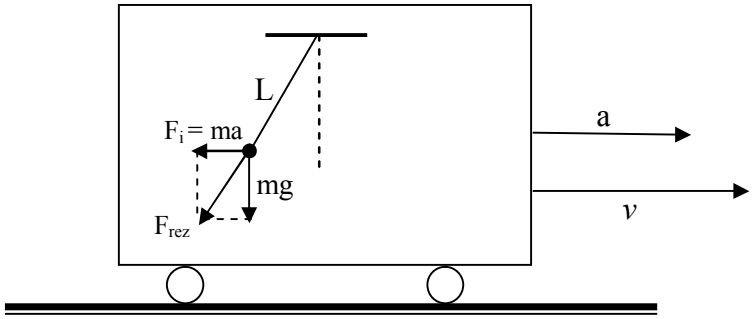
7. Sada klatno traži nov ravnotežni položaj. Vagon predstavlja neinercijalni sistem, pa na telo deluje sila inercije i sila Zemljine teže.
Treba zapaziti da rezultujuća sila deluje u pravcu konca klatna, inače to ne bi bio ravnotežni položaj, kuglica bi se još pomerala ka jačoj sili.

$F_{rez} = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$

Sada treba opet napisati silu u obliku $\mathbf{F = mg_1}$
Ako izdvojimo masu ispred znaka za koren:

$F_{rez} = m\sqrt{g^2 + a^2}$ Period je $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$

$g_1 = \sqrt{g^2 + a^2}$ (ubrzanje teže neke nove Zemlje)

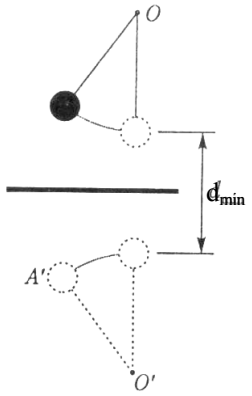


uz zadatak 7

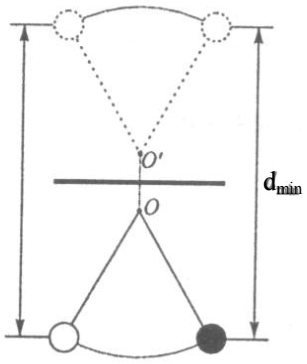
8. L = 1 m; g = 9,81 m/s^2; t = ?

Pre svega treba naći period klatna: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1m}{9{,}81 m/s^2}} = 2\ s.$

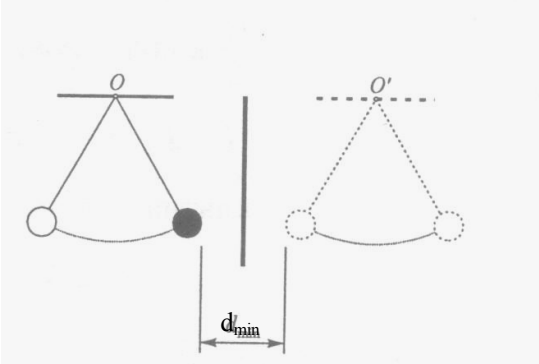
a) Rešenje bi trebalo da bude jasno sa slike: klatno i njegova slika su najbliži u ravnotežnom položaju. Do tamo i natrag treba pola perioda **t = 1 s.**
b) Sada su klatno i njegov lik najbliži u amplitudnom položaju. Od jednog do drugog amplitudnog položaja treba opet pola perioda $\mathbf{t_2 = 1\ s.}$
c) Sada treba da prođe vreme od jednog amplitudnog položaja do istog, znači ceo period $\mathbf{t_3 = 2\ s.}$



uz zadatak 8 a



uz zadatak 8 b

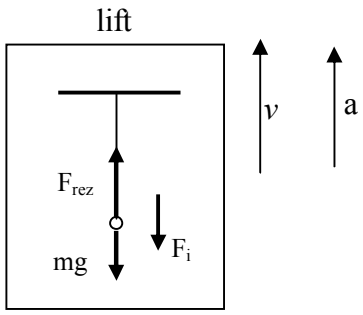


uz zadatak 8 c

9. U nepokretnoj kabini lifta period iznosi $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Ako se lift kreće uvis period će biti (pogledati zadatak 4)

$\frac{T_0}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$ Ako podignemo na kvadrat obe strane i podelimo levu i levu stranu, kao i desnu i desnu, posle kraćih izračunavanja **(PKI)** dobijamo: **a = 3g**



uz zadatak 9

10. Period klatna treba da bude:

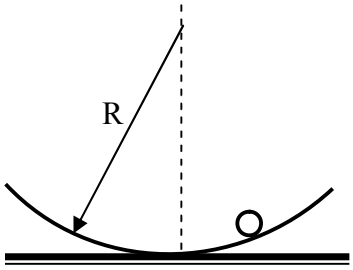
$T = \frac{t}{n} = \frac{150s}{100} = 1{,}5\ s.$ Koristćemo rezultat prethodnog zadatka: neka se lift kreće uvis i ubrzava. Period je $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$ U nepokretnoj kabini period je $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Opet ćemo podeliti levu i levu stranu i dobiti: **a = - 0,56g (PKI)**. Znak minus znači da lift ubrzava naniže!

11. ΔL = 36 cm, $T_2 = \frac{4}{5}T_1$, L = ?

Periodi klatna su, redom: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ *i* $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L-\Delta L}{g}}$ Posle zamene u gornju relaciju dobićemo:

$2\pi\sqrt{\frac{L-\Delta L}{g}} = \frac{4}{5}2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ Posle skraćivanja i kvadriranja dobija se **L = 100 cm. (PKI)**

12. Postoji potpuna sličnost kretanja kuglice i matematičkog klatna dužine R: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}981m}{9{,}81m/s^2}} \approx 2s.$ frekvencija je recipročna vrednost perioda, **znači ν = 0.5 Hz.**



uz zadatak 12

13. ΔL = 16 cm; n_1 = 10 osc; n_2 = 6 osc; L_1 = ?; L_2 = ?

Periodi klatna dati su sa dve formule: $T = \frac{t}{n}$ i $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ Ako kombinujemo ove dve formule:

$\frac{t}{n_1} = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$ i $\frac{t}{n_2} = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$ i opet, isto: podelimo levu i levu stranu pa desnu i desnu dobijamo:

(oprezno sa dvojnim razlomkom!)

$\frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{L_1}{L_2}$ ili $\frac{36}{100} = \frac{L_1}{L_2}$ odavde je L_1 = 0,36 L_2. Razlika dužina je ΔL = L_2 – L_1 (L_2 je duže klatno)

16 = 0,64L_2 ⇒ L_2 = 25 cm. pa je L_1 = 16cm.

14. L = 3,15 m; L_i = ?

Ukupna dužina sva tri klatna je L = L_1 + L_2 + L_3

Sada treba naći aritmetičku vezu između perioda klatna. Kao orijentir uzmemo drugo klatno T_2 = T. Tada je T_1 = 2 T a T_3 = T/2.

Sada ćemo izraziti dužine klatna preko perioda i naći vezu između pojedinih dužina klatna. (Mada, moglo se to zaključiti i analizom formule za period: ako je period klatna dva puta veći od drugog, onda je dužina četiri puta veća – zbog korena itd.)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$ Onda je $L_1 = \frac{(2T)^2 g}{4\pi^2} = \frac{4T^2 g}{\pi^2} = 4L$; $L_2 = L$; $L_3 = \frac{(T/2)^2}{4\pi^2} = \frac{T^2 g}{4*4\pi^2} = \frac{L}{4}$

Zamenimo u prvu relaciju: $L_1 + L_2 + L_3 = L$

4L + L + L/4 = 3,15 m

Odavde je L = 0,6 m. (PKI) Ovo je drugo klatno L_2 , L_1 = 2,4 m; L_3 = 0,15 m.

15. L = 0,25 m; g_1 = 9,81 m/s^2; g_2 = 9,80 m/s^2, n_1 = ?; n_2 = ?; Δn = ? za t = 24 h = 86400 s.

Opet koristimo formule $T = \frac{t}{n}$ i $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Najlakše je prvo izračunati oba perioda (mora se ići na veći broj decimala zbog male razlike između perioda)

$T_1 = 2*3{,}14\sqrt{\frac{0{,}25m}{9{,}81m/s^2}} = 1{,}002525\ s;\ T_2 = 2*3{,}14\sqrt{\frac{0{,}25m}{9{,}80m/s^2}} = 1{,}00304\ s.$

broj oscilacija je $n = \frac{t}{T}$ gde je t = 86400s,

n_1 = 86183 osc.; n_2 = 86138 osc. Razlika je 45 oscilacija.

16. g_Z = 9,81 m/s^2; g_M = 1,65 m/s^2;

Treba uporediti periode klatna na Mesecu i na Zemlji. Naći količnik „pogrešnog“ i „tačnog“ perioda.

$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_M}}$;$T_Z = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_Z}} \Rightarrow \frac{T_M}{T_Z} = \sqrt{\frac{g_Z}{g_M}}$ = 2,44 Dalje razmišljamo ovako: Za jednu sekundu na Zemlji istom klatnu na Mesecu treba 2,44s. Znači mnogo je sporiji i kasniće. Pokazaće manje vremena 2,44 puta. Za 24 sata to iznosi: $\frac{24h}{2{,}44} = 9{,}84\,h$ Toliko manje će pokazati. **Znači kasni 24 h – 9,84 h=14,6 h**

17. $g_{bgd} = 9{,}8060\ m/s^2$; $g_{sar} = 9{,}8051\ m/s^2$;
Opet ćemo uporediti period klatna u Sarajevu i period klatna u Beogradu – u odnosu na koji upoređujemo:

$$\frac{T_{sar}`}{T_{bgd}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{sar}}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{bgd}}}} = \sqrt{\frac{g_{bgd}}{g_{sar}}} = 1{,}000046$$ period u Sarajevu je duži, znači sat će kasniti i, za 24 h u

Beogradu pokazaće: $\frac{86400\,s}{1{,}000046} = 86396\ s.$ u Sarajevu. **Znači, kasniće 4 sekunde.**

18. $L_2 = 1{,}001L_1$;

Opet upoređujemo periode $\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{1{,}001L}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \sqrt{\frac{1{,}001}{1}} = 1{,}0005$ Opet će produženo klatno kasniti jer mu

je period duži. $\frac{86400}{1{,}0005} = 86357\ s.$ Znači kasniće 43 sekunde.

Zanimljivo je analizirati slučaj kada se dužina klatna smanji za 0,1% usled hlađenja.

$L_2 = 0{,}999\ L_1$

$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{0{,}999}{1}} = 0{,}9995$ Znači period skraćenog klatna je manji, znači klatno žuri

$\frac{86400}{0{,}9995} = 86443\ s.$ **Sat žuri 43 s.**

19. L = 1 m
Kuglica prvog klatno slobodno pada sa visine h = 1 m. Vreme padanja je:

$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2m}{9{,}81\,m/s^2}} = 0{,}45\ s.$ Drugo klatno dolazi iz amplitudnog položaja u ravnotežni.

Za to mu treba četvrtina perioda.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{1m}{9{,}81\,m/s^2}} = 2\ s.$ Četvrtina je 0,5 s. Pre će stići ona kuglica koja pada.

20. $L_1 = 64$ cm; $L_2 = 36$ cm; t = ?
Da bi prošli opet istovremeno pod datim uslovima treba da protekne isti broj perioda:
$t = N_1T_1 = N_2T_2$ ustvari, u isto vreme treba uklopiti isti broj oscilacija i perioda

$N_1 * 2\pi\sqrt{\frac{64cm}{g}} = N_2 * 2\pi\sqrt{\frac{36cm}{g}}$ Odavde je $N_1*8 = N_2*6$ $\Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{4}$ Znači najmanji broj perioda koji zadovoljavaju uslove zadatka je $N_1 = 3$ i $N_2 = 4$. sledeći slučaj je $N_1=6$ i $N_2=8$ (itd); $t_1=6T_1=9{,}62$ s.

Traženo vreme je $t = 3T_1 = 3 * 2\pi\sqrt{\frac{0{,}64\,m}{9{,}81\,m/s^2}} = 4{,}81s.$

21. $L_2 = L_1 - 30$ cm

Prema uslovima zadatka pišemo relaciju: $T_2 = \frac{1}{2}T_1 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L_1 - 30cm}{g}} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$ odavde je

$L_1 - 30\,cm = \frac{1}{4}L_1 \Rightarrow L_1 = 40\,cm.$ Period je $T = 6{,}28 * \sqrt{\frac{0{,}4m}{9{,}81\,m/s^2}} = 1{,}268\ s.$

22. $n_1 = 40$ osc; $n_2 = 30$ osc; t = 1 min; $\Delta L = 46$ cm
Možemo odmah izračunati periode oba klatna:
$T_1 = \frac{t}{n_1} = \frac{60s}{40} = 1{,}5\ s,\ T_2 = \frac{60s}{30} = 2\,s.$ Zaključujemo da je L_2 duži i $L_2 = L_1 + 46$ cm.
Za klatno u liftu pod uslovima zadatka važi:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g+a}}\ i\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1+46cm}{g}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_1+46cm}} \Rightarrow \left(\frac{1{,}5}{2}\right)^2 = \frac{L_1}{L_1+46cm}$$

odavde je **L_1 = 59,14 cm (PKI)** i **L_2 = 105, 14 cm.**
Iz izraza za jedan od perioda, kvadriranjem i sređivanjem dobija se **a = 3,66 m/s^2.** (Posle Kraćih Izračunavanja)

23. $R_z = 6400$ km; h = 5 km;
Treba da se podsetimo Njutnovog zakona gravitacije i zavisnosti ubrzanja Zemljine teže od karakteristika

Zemlje: $g = \gamma\frac{M_z}{R_z^2}$ ($mg = \gamma m M_z/R^2 \Rightarrow g = \gamma M_z/R^2$)

Sada treba izračunati period klatna na površini Zemlje i na visini h: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_2}}.$

gde je $g_1 = \gamma\frac{M_z}{R_z^2}$, $g_2 = \gamma\frac{M_z}{(R_z+h)^2}$ Ako ove izraze zamenimo u izraze za periode i nađemo količnik perioda: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{R+h}{R} = \frac{6405}{6400} = 1{,}00078s$ **(PET)** Period na visini 5 km je duži, znači sat će da kasni:
$\frac{86400s}{1{,}00078} = 86333\ s$ **i to 67 sekundi.**

24. Možemo zaključiti da dužinu klatna na visini h treba smanjiti da bi period ostao isti (manje g – manja dužina)
$T_1 = T_2 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_1-x}{g_2}} \Rightarrow \frac{L_1}{g_1} = \frac{L_1-x}{g_2}$ Posle elementarnih transformacija **(PET)** dobija se:
pogledajte zadatak 23. ($g_1 = \gamma\frac{M_z}{R_z^2}$, $g_2 = \gamma\frac{M_z}{(R_z+h)^2}$)
$x = L_1\left(1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2\right) = 0{,}003.$ **Znači dužinu klatna treba skratiti za 0,3 %.**

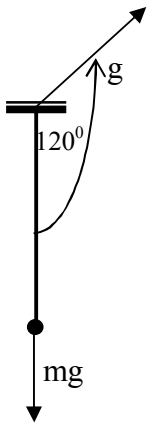
25. $R_z = 6400$ km; h = 2,5 km.
Ovaj zadatak predstavlja varijaciju nekih prethodnih zadataka. Novo je da sat nije tačan na površini Zemlje.
Postupak je isti kao u nekim prethodnim zadacima: naći količnik "pogrešnog" i "tačnog" perioda:
$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_2}}.$ $g_1 = \gamma\frac{M_z}{R_z^2}$, $g_2 = \gamma\frac{M_z}{(R_z+h)^2}$ (tačan je T_2 !)
$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_z}{R_z+h} = \frac{6400km}{6402{,}5km} = 0{,}9996.$ **(PET)** $\frac{86400s}{0{,}9996} = 86435\ s.$ **Sat napreduje za 35 s.**

26. $\Delta L = 0{,}15$ m, $T_1 = ?$; $T_2 = ?$
Uslov zadatka je $7\ T_1 = 8\ T_2$ Zaključujemo da je L_1 duže klatno (veći period)

$$7 * 2\pi\sqrt{\frac{L+\Delta L}{g}} = 8 * 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ Odavde je $49(L + \Delta L) = 64\ L \Rightarrow L = \frac{49\Delta L}{15} = \frac{49 * 0{,}15cm}{15} = 0{,}49m$

Periodi su 1,4 s i 1,6 sekundi. (uzeto je $g = 9{,}81$ m/s^2)

27. $L = 25$ cm; $a = g$; $T = ?$.
Opet imamo posla sa ubrzanim – neinercijalnim sistemima.
U neinercijalnim sistemima na tela deluje sila inercije usmerena nasuprot ubrzanja.



uz zadatak 27

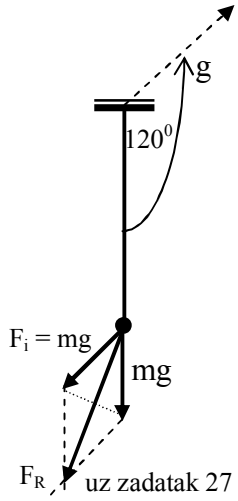
Opet će biti neka nova Zemlja pa treba naći ubrzanje njene teže.

Sada treba uvesti silu inercije i naći rezultujuću silu.
Ugao između sile Zemljine teže i sile inercije je 60^0.
Treba sa slike zapaziti da rezultujuća sila predstavlja dve visine jednakostraničnog trougla stranice mg.

$$F_{rez} = 2\frac{mg\sqrt{3}}{2} = mg\sqrt{3}$$

Znači nova Zemlja ima ubrzanje teže $g\sqrt{3}$
Period klatna iznosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\sqrt{3}}}$$

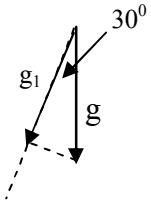


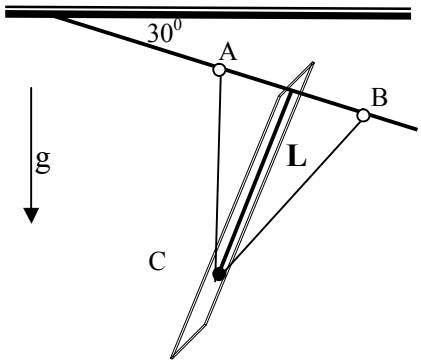
uz zadatak 27

28. Sada je Zemlja u redu ali je klatno iskošeno. Treba naći komponentu Zemljine teže u smeru ravni oslilovanja klatna. Očigledno je

$$g_1 = \frac{g\sqrt{3}}{2} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g\sqrt{3}}}$$





uz zadatak 28

2. Oscilacije

29. Telo koje osciluje u jednom minutu napravi 15 oscilacija. Koliko je najmanje vremena potrebno od početka oscilovanja da telo stigne najdalje od ravnotežnog položaja. Telo kreće iz ravnotežnog položaja. Ako je amplituda oscilovanja 5 mm koliki put pređe to telo za 5 minuta? (**Rez.:** 1s; 1,5m)

30. Teg mase 4 kg visi na kraju opruge i osciluje sa periodom 3 s. Koliki će biti period kada se doda još 5 kg? (**Rez.:** 4,5 s)

31. Koliku masu treba dodati tegu mase m koje osciluje na opruzi da se period poveća tri puta. (**Rez.:** 8 m – treba dodati)

32. Amplituda oscilovanja tega okačenog o oprugu iznosi 10 cm. Kolika je elongacija kada je kinetička energija dva puta manja od potencijalne? (**Rez.:** 8,2 cm)

33. Telo mase 500 g pri oscilovanju duž horizontalnog pravca u jednom trenutku ima brzinu 20 m/s dok joj je potencijalna energija 300 J. Kolikom brzinom prolazi telo kroz ravnotežni položaj? (**Rez.:** 40 m/s)

34. Kinetička energija matematičkog klatna pri prelasku iz amplitudnog u ravnotežni položaj uveća se za 50 mJ. Ako je masa klatna 400 mg, odrediti:
a) brzinu klatna pri prolasku kroz ravnotežni položaj (v_{max}) (**Rez.:** 15,81 m/s)
b) razliku u visini najniže i najviše tačke klatna pri oscilovanju (H) (**Rez.:** 12,74 m)
c) za koliko se promeni period matematičkog klatna, ukoliko se masa kuglice klatna poveća 1,5 puta (**Rez.:** ništa)
d) za koliko se kugla nalazi iznad ravnotežnog položaja u trenutku kada je brzina dvostruko manja od maksimalne? (**Rez.:** 9,55 m)

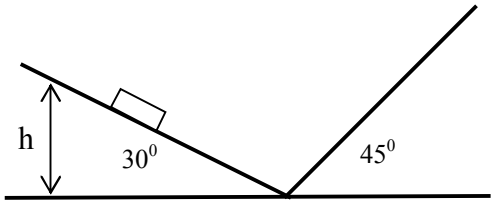
35. Za neistegljivu nit dužine 1 m vezana je kuglica mase m. Nit se otkloni od vertikale za 30^0 i pusti. Kolikom brzinom prolazi kroz ravnotežni položaj? (**Rez.:** 1,62 m/s)

36. Elastična opruga se istegne za 1,5 cm kad o nju obesimo telo mase 1 kg. Kolika je frekvencija oscilovanja sistema ako o oprugu obesimo telo mase 10 kg. (**Rez.:** 1,29 Hz)

37. Kada se o oprugu okači telo mase **m** opruga se izduži za 10 cm. Zatim se taj sistem pobudi na oscilovanje. Izračunati period oscilovanja. (**Rez.:** 0,63 s)

38. Nađi period oscilovanja tela koja se kreće između dve strme ravni nagibnih uglova 30^0 i 45^0. Kuglica krene sa visine h. Trenje zanemariti. Nema nikakvih gubitaka energije.

(**Rez.:** $T = 4\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{2}+1\right)$)

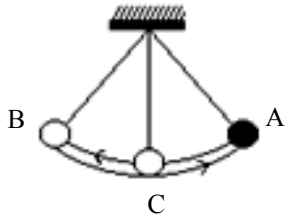


uz zadatak 38

2. Oscilacije – rešenja

29. n = 15 osc; t = 1 min; x_0 = 5 mm; s = ? za t = 5 minuta.
Možemo odmah izračunati period:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60s}{15} = 4\ s.$$



Jedna oscilacija je put ABA (do tamo i natrag). Oscilacija se izvrši za jedan period. Od ravnotežnog položaja do krajnjeg – put CA telo pređe za četvrtinu perioda **t = 1 s.**
Za jednu oscilaciju telo pređe 4 amplitude.
$s_1 = 4*x_0 = 20$ mm.

Za 5 minuta telo napravi $n = \frac{t}{T} = \frac{300s}{4s} = 75\ oscilacija$ Pređeni put je $\mathbf{s_{uk} = 75*20\ mm = 1500\ mm}$

30. m_1 = 4 kg; T_1 = 3 s; m_2 = 9 kg; T_2 = ?
Napisaćemo period u oba slučaja:

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$ Da bi smanjili nepotrebna izračunavanja napravićemo količnik perioda:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}} = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$ Odavde je $T_2 = \frac{3}{2}T_1 = 4{,}5\ s.$

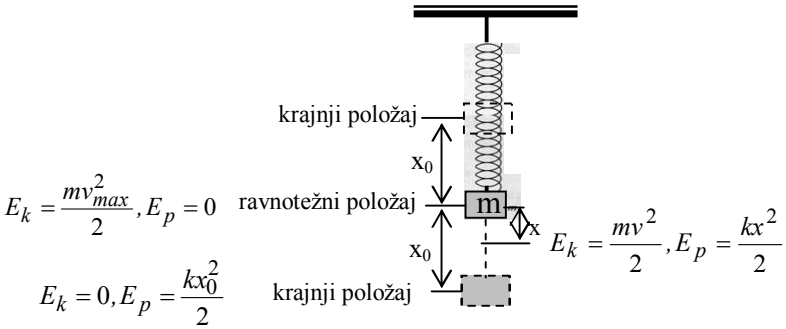
31. m_x = ? ; $T_2 = 3\ T_1$
Opet treba napisati period u oba slučaja i zameniti u relaciju za periode:

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_x}{k}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m+m_x}{k}} = 3*2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Odavde, kvadriranjem, dobijamo:

$m + m_x = 9m \Rightarrow \mathbf{m_x = 8\ m}$.
Ovaj zadatak smo mogli i napamet uraditi, uzimajući u obzir da period zavisi od korena mase tega. To znači da bi se period povećao n – puta masu treba povećati n^2 – puta.
Proverite zaključivanje na primeru: Koliku masu treba dodati tegu da bi mu se period povećao 4 puta?

32. x_0 = 10 cm; $E_k = E_p/2$, x = ?.
Primenićemo zakon održanja energije:
$E_k + E_p$ = const ili
$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$
posmatraćemo krajnji položaj (jer je data amplituda) i neki proizvoljni položaj:

$$0 + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$



Po uslovu zadatka kinetička energija (u tom proizvoljnom položaju) je jednaka polovini potencijalne:

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{kx_0^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{kx^2}{2} \Rightarrow x_0^2 = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_0$$ ili $\mathbf{x = 0{,}82\ x_0 = 8{,}2\ cm.}$

Za uvežbavanje primene zakona održanja energije od značaja je izračunati maksimalnu brzinu tega ako je data amplituda: (zato posmatramo krajnji i ravnotežni položaj)

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \Rightarrow 0 + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2} + 0 \Rightarrow v_{max} = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

33. m = 500 g; v_1 = 20 m/s; E_{p1} = 300 J. v_{max} = ?
Opet primena zakona održanja energije. Kad prolazi kroz ravnotežni položaj telo ima samo kinetičku energiju:

$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + E_{p1} = \frac{mv_{max}^2}{2} + 0$ Odavde je $\mathbf{v_{max} = 40\ m/s}$.

34. ΔE_k = 50 mJ = $50*10^{-3}$ J; m = 400 mg = $400*10^{-6}$ kg (obratiti pažnju na pretvaranje jedinica)

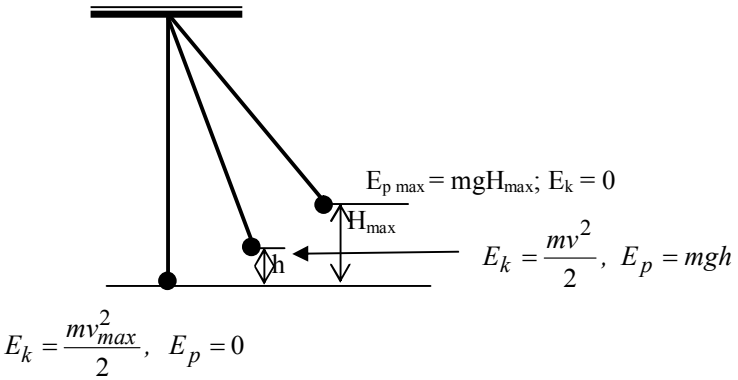
a) v_{max} = ? (može i 50 mJ = 0,05 J; 400 mg = 0,4 g = 0,0004 kg.)

Postavka zadatka kaže (na malo zamršen način) da ja ukupna energija oscilovanja 50 mJ – bilo maksimalna kinetička ili maksimalna potencijalna energija:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = E_{k\,max} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{k\,max}}{m}} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2*50*10^{-3}J}{400*10^{-6}kg}} = \sqrt{\frac{100*10^3}{400}} = \sqrt{250} = 15{,}81\,m/s.$$

b) Sada ćemo računati da je maksimalna potencijalna energija 50 mJ:
$E_{p\,max} = mgH \Rightarrow$

$$H = \frac{E_{p\,max}}{mg} = \frac{50*10^{-3}J}{400*10^{-6}kg*9{,}81\,m/s^2} = 12{,}74\,m.$$



uz zadatak 34

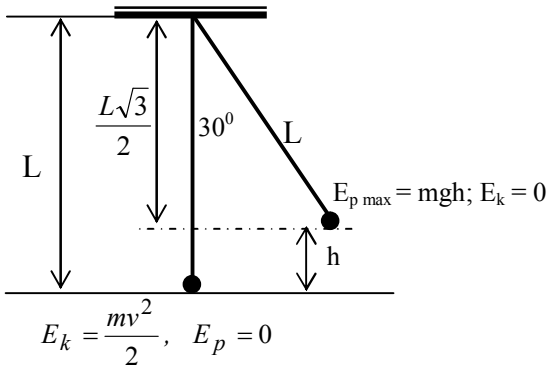
c) Opet zamka, period matematičkog klatna **ne zavisi od mase!** $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ **Period ostaje isti!**

d) h = ? $v = v_{max}/2$
Primenićemo (svemogući) zakon održanja energije.
$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \Rightarrow$

$$\frac{m(v_{max}/2)^2}{2} + mgh = \frac{mv_{max}^2}{2} + 0 \Rightarrow \quad h = \frac{3v_{max}^2}{8g} = 9{,}55\frac{m}{s}.$$

35. L = 1m, ugao 30^0; v = ?
Opet (svemogući) zakon održanja energije:
$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$
Sada treba obratiti pažnju kod određivanja visine na kojoj se kuglica nalazi: (setite se jednakostraničnog trougla)

$$h = L - \frac{L\sqrt{3}}{2} = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}134L$$



uz zadatak 35

$$0 + mgh = \frac{mv^2}{2} + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad v = 1{,}62\,m/s.$$

Ovaj izraz trebalo bi da prepoznate iz sedmog razreda $v = \sqrt{2gh}$ je brzina slobodnog pada. Vidimo da promena mehaničke energije ne zavisi od oblika putanje tela već samo od početne i krajnje tačke – to znači zavisi samo od visinske razlike!

36. x = 1,5 cm; m = 1kg; υ = ? ako je m = 10 kg.

Istezanje opruge nam služi da izračunamo konstantu opruge: $k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{1kg * 9{,}81 m/s^2}{0{,}015 m} = 654 \frac{kg}{s^2}$

(Zapaziti da je kg/s^2 isto što i N/m)
Za promenu, sada se traži frekvencija oscilovanja:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{654\, kg/s^2}{10 kg}} = 1{,}29\ Hz$$

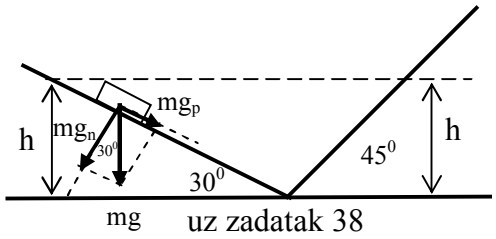
37. x = 10 cm; T = ?
Slično kao gore, iz istezanja opruge nađemo konstantu opruge.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{x}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1m}{9{,}81 m/s^2}} = 0{,}63\ s.$$

38. Plan rešavanja bi bio sledeći:
Prvo zaključujemo da telo može doći na drugoj strmoj ravni samo do visine h – zbog zakona održanja energije.

Dalje, brzina tela u podnožju iznosi $v = \sqrt{2gh}$ bez obzira sa koje strme ravni sklizne. (zakon održanja energije)

Vreme spuštanja niz strmu ravan jednako je vremenu uspona do iste visine.
Neka je vreme spuštanja niz levu strmu ravan t_1 a niz desnu t_2.
Period je onda $T = 2t_1 + 2t_2 = 2(t_1 + t_2)$
Ubrzanje niz strmu ravan je g_p.



uz zadatak 38

na levoj ravni je $g_p = \frac{g}{2}$ na desnoj je $g_p = \frac{g\sqrt{2}}{2}$ (razlaganje sile Zemljine teže na desnoj strani prepuštam vama)
Ovo sledi iz Drugog Njutnovog zakona:
$ma = mg_p \Rightarrow a = g_p$
Vreme kretanja niz (i uz) strmu ravan izračunaćemo iz formule v = at

$$t = \frac{v}{a} \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\frac{g}{2}} = \frac{2\sqrt{2gh}}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\frac{g\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$T = 2(t_1 + t_2) = 2\left(2\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{h}{g}}\right) \qquad T = 4\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

3. Talasi

39. Rastojanje između brega i najbliže dolje talasa je 9 m. Ako je čestici, čije koja osciluje i prenosi talas, potrebno 0,25 s da dođe od jednog do drugog amplitudnog položaja, izračunati period, frekvenciju, talasnu dužinu i brzinu tog talasa. (**Rez.:** 0,5s; 2 Hz; 18 m; 36 m/s)

40. Razlika talasnih dužina dvaju talasa istog tipa nastalih u istoj sredini iznosi 4 m, dok frekvencije istih stoje u odnosu 2:3. Kolike su njihove talasne dužine? (**Rez.:** 8m i 12 m)

41. Talas prelazi iz jedne u drugu sredinu i pri tome se talasna dužina poveća. Kolika će biti brzina talasa u drugoj sredini, ako je u prvoj 8 m/s, i ako je odnos talasnih dužina u tim sredinama 1,3. (**Rez**.: 10,4 m/s)

42. Prelazeći iz jedne sredine u drugu talas poveća talasnu dužinu za 0,3 m. Za koliko se promeni njegova brzina prostiranja? Frekvencija talasa u prvoj sredini je 500 Hz. (**Rez**.: 150 m/s)

43. Zvuk udarca u gvozdenu šinu na rastojanju od 2000 m stigne kroz vazduh za 5,5 s kasnije nego kroz šinu. Kolika je brzina zvuka u gvožđu ako je u vazduhu 340 m/s. (**Rez.:** 5000 m/s)

44. Strelac čuje zvuk udara metka u metu nakon 1s posle pucnja. Na kom rastojanju od njega je postavljena meta? Srednja brzina metka je 500 m/s, a brzina zvuka 330 m/s. (**Rez**.:200 m)

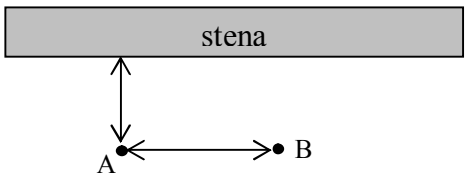
45. Signalna raketa ispaljena uvis raspala se posle 5 s. Zvuk eksplozije čuo se na zemlji 0,4 s posle eksplozije. Do koje visine je stigla raketa i kojom srednjom brzinom? Brzina zvuka u vazduhu je 330m/s. **(Rez.:** 132 m; 26,4 m/s)

46. Planinar je ispustio kamen u provaliju duboku 45 m. Posle koliko vremena čuje udar kamena u dno provalije? Brzina zvuka u vazduhu je 340 m/s. (**Rez:** 3,132 s)

47. a) Zvuk pucnja i puščano zrno (ispaljeno vertikalno uvis) stignu istovremano do visine **h**. Odrediti početnu brzinu zrna, ako je brzina zvuka **u**. **(Rez.:** $v_0 = u + \frac{gh}{2u}$)

b) Kolika je početna brzina zrna ako zrno i zvuk pucnja istovremeno stignu do maksimalne visine do koje se zrno može popeti. **(Rez.:** 2u)

48. Čovek u tački A ispali hitac (uvis). Čovek u tački B čuje dva pucnja u razmaku 0,92s. Obojica se nalaze ispred vertikalne stene na rastojanju 200 m. Udaljenost između ljudi je 100 m. Kolika je brzina zvuka? **(Rez.:** 339,5 m/s)



uz zadatak 48

49. Prilikom povećanja apsolutne temperature vazduha 1,44 puta brzine prostiranja zvuka se poveća za 68 m/s. Kolika je niža temperatura? Kolika je brzina prostiranja zvuka na nižoj temperaturi? (Uputstvo: za prostiranje zvuka kroz vazduh važi približna formula: $u = 20\sqrt{T}$) (**Rez**.: 289 K; 340 m/s)

50. Jedan kraj užeta je učvršćen, a drugi se dovodi u oscilovanje sa frekvencijom 5 Hz. Tada se formira stojeći talas čiji čvorovi dele uže na 6 jednakih delova. Kolika je dužina užeta ako je brzina talasa u užetu 5 m/s?

51. Rastojanje prvog i šestog čvora je 60 cm. Kolika ja frekvencija talasa ako je brzina talasa 4 m/s? (**Rez.:** 16,7 Hz)

52. Cev dužine 1 m ispunjena je vazduhom (brzina zvuka je 340 m/s). Jedanput je cev otvorena na jednom kraju, drugi put na oba kraja, a treći put zatvorena na oba kraja. Pri kojoj najmanjoj frekvenciji će u cevi nastati stojeći talas. (**Rez**.:85 Hz; 170Hz; 170 Hz)

53. Iznad cilindričnog suda dužine 1 m prineta je zvučna viljuška koja osciluje frekvencijom 340 Hz. Ako se ovaj sud polako puni vodom, pri kojim će visinama nivoa vode u sudu zvuk viljuške biti pojačan? (**Rez**.: 0,25 m; 0,75 m; 1,25 m, da li je ovo poslednje moguće?)

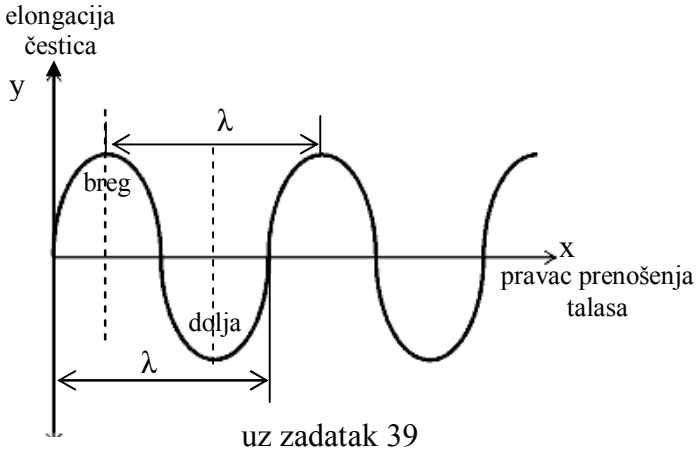
54. Iz mesta A u mesto B poslat je zvučni signal frekvencije 50 Hz koji se prostire kroz vazduh brzinom 330 m/s. Pri tome se u rastojanje AB uklopi ceo broj talasnih dužina. Ogled je ponovljen pri temperaturi većoj za 20 ^{0}C – tada se u rastojanje AB uklope dve talasne dužine manje. Naći rastojanje AB ako se pri povećanju temperature za 1 ^{0}C brzina zvuka poveća za 0,5 m/s. (**Rez**.: 448,8 m)

55. Kada se žica skrati za 10 cm, frekvencija osnovnog tona koji ona emituje poveća se 1,5 puta. Odrediti dužinu žice pre skraćenja. Brzina talasa duž žice se ne menja. (**Rez**.: 30 cm)

3. Talasi – rešenja

39. d = 9 m; t = 0,25 s; T = ?; ν = ?; λ = ?; u = ? (brzinu talasa obeležavaćemo sa **u**)
Rastojanje od brega do prve dolje je pola talasne dužine. Znači talasna dužina je 18 m. **λ = 18m.**
Od jednog do drugog amplitudnog položaja (tj. od brega do prve dolje) treba pola perioda: T = 2∗0,25s
⇒ **T = 0,5 s.**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5s} = 2\ Hz, \quad u = \frac{\lambda}{T} = 36\frac{m}{s}.$$



uz zadatak 39

40. $\lambda_1 - \lambda_2 = 4$ m; $\nu_1 : \nu_2 = 2:3$;
$\lambda_1 = ?$; $\lambda_2 = ?$
(Za postavku zapaziti: ako je talasna dužina λ_1 veća od λ_2, onda je frekvencija ν_1 manja od ν_2)
Rasplešćemo proporciju za frekvencije: $3\,\nu_1 = 2\,\nu_2$.

Sada frekvenciju izrazimo preko talasne dužine: $\nu = \frac{u}{\lambda}$ ⇒

$3\frac{u}{\lambda_1} = 2\frac{u}{\lambda_2} \Rightarrow 3\lambda_2 = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2\lambda_1}{3}$ Ako ovo zamenimo u relaciju za talasne dužine:

$$\lambda_1 - \frac{2\lambda_2}{3} = 4m \Rightarrow \lambda_1 = 12m\ i\ \lambda_2 = 8m.$$

41. $u_1 = 8$ m/s; $u_2 = ?$; $\lambda_2/\lambda_1 = 1{,}3$ (u drugoj sredini talasna dužina je veća)
Prvo $\lambda_2 = 1{,}3\,\lambda_1$ Zatim:
Prilikom prelaska talasa iz jedne sredine u drugu frekvencija ostaje neizmenjena! $\nu_1 = \nu_2$

$$u = \lambda\nu \Rightarrow \nu = \frac{u}{\lambda} \qquad \nu_1 = \nu_2 \Rightarrow \frac{u_1}{\lambda_1} = \frac{u_2}{\lambda_2} \Rightarrow u_2 = \frac{u_1\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow u_2 = \frac{u_1 * 1{,}3\lambda_1}{\lambda_1}\ u_2 = 10{,}4\frac{m}{s}.$$

42. $\lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}3$ m; $\nu_1 = 500$ Hz; $\Delta u = ?$
Ako je frekvencija talasa u prvoj sredini 500 Hz onda je tolika i u drugoj sredini!
Prilikom prelaska talasa iz jedne sredine u drugu frekvencija ostaje neizmenjena! $\nu_1 = \nu_2$
Izrazićemo brzine preko talasne dužine i frekvencije: $u = \lambda\,\nu$
$\Delta u = u_2 - u_1 \Rightarrow \Delta u = \lambda_2\nu - \lambda_1\nu = \nu(\lambda_2 - \lambda_1)$ **Δu = 500Hz∗0,3m = 150 m/s.**

43. L = 2000 m; Δt = 5,5 s; $u_{vaz} = 340$ m/s; $u_{Fe} = ?$
Može se odmah izračunati vreme prostiranja zvuka kroz vazduh $t_{vaz} = \frac{L}{u_{vaz}} = \frac{2000m}{340m/s} = 5{,}9\ s.$
Znači kroz gvožđe zvuk se prostire 0,4s.
Prema tome brzina zvuka kroz gvožđe iznosi: $u_{Fe} = \frac{L}{t} = \frac{2000m}{0{,}4s} = 5000\frac{m}{s}.$

44. Δt =1 s; $v_{met} = 500$ m/s; $u_{zv} = 330$ m/s; L = ?
Dato vreme se sastoji od vremena da metak doleti do mete i da se zvuk vrati do strelca.

$$t = t_1 + t_2 \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v_m} + \frac{L}{u_z} \Rightarrow t = L\left(\frac{1}{v_m} + \frac{1}{u_z}\right) \Rightarrow L = \frac{t}{\frac{1}{v_m} + \frac{1}{u_z}}, L = \frac{1s}{0{,}005s/m} = 200m.$$

45. $t_1 = 5$ s; $t_2 = 0{,}4$ s; u = 330 m/s; h = ? ; v_{sr} = ?

Zvuk eksplozije se vraćao 0,4 s ⇒ **h = ut₂ = 330 m/s*0,4 s = 132 m.** Visina na kojoj je eksplodirala granata

Srednja brzina rakete je $v_{sr} = \frac{h}{t_1} = \frac{132\,m}{5s} = 26{,}4\frac{m}{s}$.

46. h = 45 m; u = 340 m/s; t = ?

Vreme se sastoji od vremena da padne kamen (slobodan pad) i vremena da se zvuk vrati.

$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2*45m}{10\,m/s^2}} = 3\,s.$ Vreme da se zvuk vrati je $t_2 = \frac{h}{u} = \frac{45m}{340\,m/s} = 0{,}132\,s$

To ukupno iznosi $t = t_1 + t_2$ **t = 3,132 s.**

47. **a)** Traži se početna brzina v_0

Metak se kreće uvis usporeno kao vertikalni hitac, zvuk se kreće ravnomerno:

$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ $\quad h = ut \Rightarrow t = \frac{h}{u}$ Ovo vreme ćemo zameniti u izraz za visinu

$h = v_0\frac{h}{u} - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{u}\right)^2$ sređivanjem ovog izraza dobija se $v_0 = u + \frac{gh}{2u}$

$$v_0\frac{h}{u} = h + \frac{gh^2}{2u^2} \Rightarrow v_0 = \frac{h + \frac{gh^2}{2u^2}}{\frac{h}{u}}$$

$$v_0 = \frac{h\left(1 + \frac{gh}{2u}\right)}{\frac{h}{u}} \Rightarrow v_0 = u + \frac{gh}{2u}$$

b) Opet se traži se početna brzina:

maksimalna visina vertikalnog hica je: $h_{max} = \frac{v_o^2}{2g}$ vreme penjanja

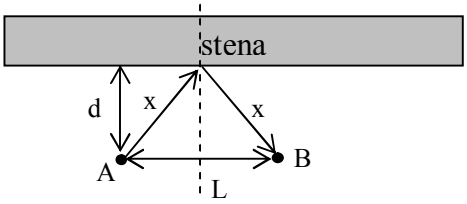
$t = \frac{v_o}{g}$

Zvuk se kreće ravnomerno i da dođe do maksimalne visine treba mu vremena: $t = \frac{h_{max}}{u}$

Ako izjednačimo ova dva vremena $\frac{v_o}{g} = \frac{h_{max}}{u} \Rightarrow \frac{v_o}{g} = \frac{v_o^2}{2gu}$ **Odavde je v_o = 2u.**

48. Δt = 0,92 s; d = 200 m; L = 100 m; u = ?

Čovek u tački B će čuti zvuk jednom direktno a drugi put kada se odbije od stene.



uz zadatak 48

$t_1 = \frac{L}{u}$, $t_2 = \frac{2x}{u}$ Rastojanje x izračunaćemo po Pitagorinoj teoremi:

$x = \sqrt{d^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{200^2 + 50^2} = 206{,}16\,m.$

$t_2 - t_1 = \Delta t \Rightarrow \frac{2x}{u} - \frac{L}{u} = \Delta t \Rightarrow \frac{2x - L}{u} = \Delta t$ Odavde je $u = \frac{2x - L}{\Delta t} = \frac{2*206{,}16 - 100}{0{,}92}\left[\frac{m}{s}\right] = 339{,}5\frac{m}{s}$.

49. $T_2 = 1{,}44T_1$; $u_2 = u_1 + 68$m/s; T_1 = ?; u_1 = ?

Iskoristićemo formulu datu u postavci zadatka:

$u_1 = 20\sqrt{T_1}$; $u_2 = 20\sqrt{T_2}$ Zamenimo ove relacije u uslov zadatka:

$20\sqrt{T_2} = 20\sqrt{T_1} + 68.$

$20\sqrt{1{,}44T_1} = 20\sqrt{T_1} + 68 \Rightarrow 24\sqrt{T_1} = 20\sqrt{T_1} + 68 \quad \sqrt{T_1} = 17 \Rightarrow T_1 = 289K$

Brzina je $u_1 = 20*\sqrt{T_1} = 20*17 = 340\frac{m}{s}$

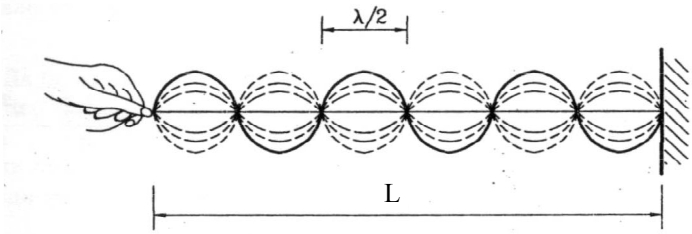
50. ν = 5 Hz; u = 5 m/s; L = ?

Rastojanje između dva čvora iznosi pola talasne dužine.

Talasna dužina prema podacima u zadatku iznosi:

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{5m/s}{5Hz} = 1m.$$

Znači dužina žice je $6\frac{\lambda}{2} = 6 * 0{,}5m = 3m.$ **L = 3m.**

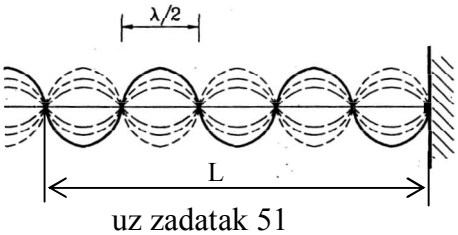


51. L = 60 cm; u = 4 m/s; ν = ?

Ovaj zadatak je varijanta prethodnog. Od prvog do šestog čvora ima pet polovina talasnih dužina:

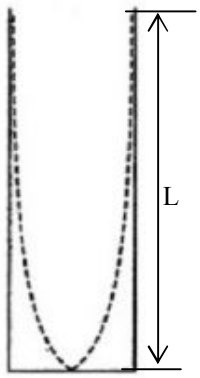
$5\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{5} = 0{,}24m.$ Znači da je frekvencija

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{4m/s}{0{,}24m} = 16{,}7Hz.$$

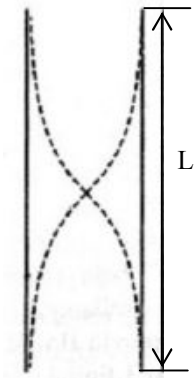


uz zadatak 51

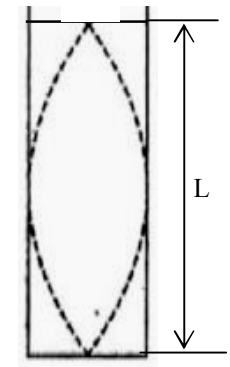
52. L = 1 m; u = 340 m/s;



zad 52: 1) cev otvorena na jednom kraju



zad 52: 2) cev otvorena na oba kraja



zad 52:3) cev zatvorena na oba kraja

Na zatvorenom kraju javlja se čvor, a na otvorenom kraju javlja se trbuh.

U prvom slučaju je L = λ/4

λ = 4 m. Frekvencija je

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{340m/s}{4m} = 85\ Hz$$

U drugom slučaju je L = λ/2,

λ = 2 m. frekvencija je 170 Hz.

U trećem slučaju je L = λ/2,

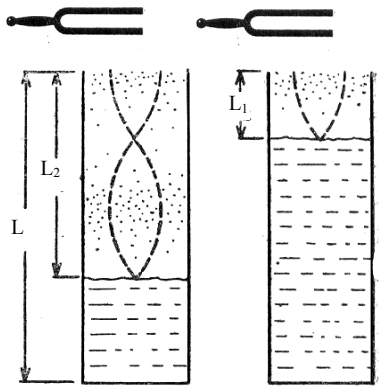
λ = 2 m. frekvencija je 170 Hz.

53. L = 1 m; ν = 340 Hz; u = 340 m/s; L_n = ?

Zvuk viljuške se maksimalno pojačava u trenutku kada se frekvencija sopstvenih oscilacija vazdušnog stuba u sudu izjednači sa frekvencijom zvučne viljuške, tj., **kada nastupi rezonancija.**

Prvo pojačanje nastupa kada je: $L_1 = 1 \cdot \frac{\lambda}{4}$

Drugo pojačanje: $L_2 = 3 \cdot \frac{\lambda}{4}$



uz zadatak 53

Uz malo mašte može se zaključiti da će se pojačanje uvek javljati ako je dužina stuba jednaka neparnom broju četvrtina talasnih dužina: 1, 2, 3,..

Iz matematike znamo da se neparan broj može napisati kao (2n – 1) gde je n = 1,2,3, ... (ili (2n + 1) gde je n = 0,1,2, ...)

Prema tome uslov za pojačanje zvuka glasi: $L_n = (2n-1)\frac{\lambda}{4},\ \ n = 1,2,3,...$

Frekvencija je data pa se može izračunati talasna dužina: λ = 1 m. tako sad uslov za pojačanje izgleda:

$L_n = \frac{2n-1}{4}[m]$ Zamenom broja n dobijamo redom: **n = 1, L_1 = 0,25 m; n = 2, L_2 = 0,75 m;**

n = 3, L_3 = 1,25 m – ovo ne može da se ostvari sud nije toliko dugačak! Ostaju prve dve vrednosti.

54. $\nu = 50$ Hz; $u_1 = 330$ m/s; AB = ?

Odmah se može izračunati talasna dužina zvuka na nižoj temperaturi: $\lambda_1 = \frac{u_1}{\nu} = \frac{330\,m/s}{50Hz} = 6{,}6\ m$

Brzina zvuka na višoj temperaturi je 340m/s. (Ovo nije teško izračunati: za svaki stepen Celzijusa brzina se poveća za 0,5 m/s; pa kao se temperatura povećela za 20 ^{0}C to iznosi 10 m/s.)

Talasna dužina na višoj temperaturi iznosi: $\lambda_2 = \frac{u_2}{\nu} = \frac{340\,m/s}{50Hz} = 6{,}8\ m$

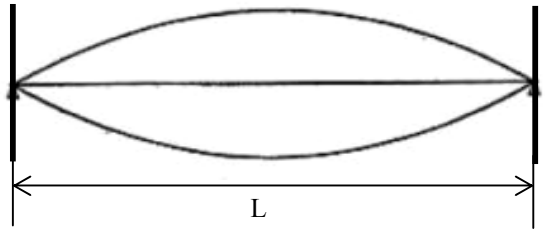
Uslov zadatka je:
$n\,\lambda_1 = AB$
$(n-2)\,\lambda_2 = AB$ gde je n ceo broj.
Najbrže ćemo rešiti ako izjednačimo leve strane: $n\,\lambda_1 = (n-2)\,\lambda_2$ Posle kraćiih izračunavanja (PKI) dobijamo da je **n = 68**
Znači AB = 68*6,6m = 448,8 m.

55. $\Delta L = 10$ cm; $\nu_2 = 1{,}5\nu_1$

Osnovni ton na žici jednak je polovini talasne dužine:

$L_1 = \frac{\lambda_1}{2},\ \ L_2 = \frac{\lambda_2}{2}$

Ako brzina ostaje ista naći ćemo vezu između talasnih dužina:



uz zadatak 55

$\nu_2 = 1{,}5\nu_1 \Rightarrow \frac{u}{\lambda_2} = 1{,}5\frac{u}{\lambda_1} \Rightarrow \ \lambda_1 = 1{,}5\lambda_2$

$\Delta L = 10$ cm $\Rightarrow$ $L_1 - L_2 = 10$ cm (prva dužina je veća)

$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2} = 10\,cm \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 20\,cm \Rightarrow 1{,}5\lambda_2 - \lambda_2 = 20\,cm$ Odavde je $\lambda_2 = 40$ cm. Znači dužina žice posle skraćenja je 20 cm, a **pre skraćenja je 30 cm.**

4. Doplerov efekat

56. Auto se kreće po pravom putu brzinom 54 km/h. Za njim juri policijski auto brzinom 72 km/h sa uključenom sirenom frekvencije 750 Hz. Koliku frekvenciju čuje vozač prvog auta kao je brzina zvuka u vazduhu 340 m/s? (**Rez.**: 762 Hz)

57. Izvor zvuka frekvencije 600 Hz kreće se ravnomerno pored nepokretnog prijemnika, brzinom 40 m/s. Za koliko se razlikuju frekvencije zvuka koje registruje prijemnik kada mu se izvor pribižava i kada se udaljava? Brzina zvuka u vazduhu je 340 m/s. **(Rez.:** 143 Hz)

58. Kojom brzinom treba da preleti avion neposredno iznad posmatrača koji miruje da bi ovaj čuo tri puta veću frekvenciju pri njegovom približavanju nego pri udaljavanju? Brzina zvuka je 340 m/s. (**Rez**.: 170 m/s)

59. Prilikom udaljavanja prijemnika nekom brzinom od zvučnog izvora koji miruje, frekvencija koju ovaj registruje iznosi 1011 Hz. Ako se pak, njegova brzina poveća tri puta, frekvencija koju registruje iznosi 993 Hz. Kolika je prvobitna brzina prijemnika i frekvencija talasa koje emituje izvor? Brzina zvuka je 340 m/s. (**Rez**.: 3 m/s; 1020 Hz)

60. Kolikom brzinom i u kom smeru treba da se kreće prijemnik u odnosu na nepokretni zvučni izvor frekvencije 300 Hz da bi primao zvuk frekvencije 200 Hz, ako je brzina prostiranja zvuka 360 m/s? Kolika bi temperatura vazduha odgovarala ovoj brzini zvuka? Za brzinu zvuka u vazduhu važi približna formula $u=20\sqrt{T}$ (**Rez.**: 120 m/s; 51 ^{0}C)

61. Slepi miš leti ka steni brzinom 6 m/s i emituje ultra zvuk frekvencije 45 kHz. Koju frekvenciju će čuti slepi miš? Razlikovati slučajeve:
a) kada se slepi miš približava steni, (**Rez.**: 46,62 kHz)
b) kada se slepi miš udaljava od stene (**Rez.**: 43,44 kHz)

62. Dva auta se kreću duž istog pravca jedan za drugim. Auto ispred ima brzinu 50 m/s, a auto iza ima brzinu 40 m/s. Auto iza emituje zvuk frekvencije 500 Hz koji se odbija od auta ispred i stiže do auta iza. Koliku frekvenciju registruje vozač auta iza? (**Rez.**:471 Hz)

63. Dva broda se kreću jedan drugom u susret istim brzinama 10 m/s. Sa prvog broda emituje se ultrazvučni signal frekvencije 50 kHz koji se odbija od drugog broda i vraća na prvi brod. Odrediti frekvenciju prijemnog signala. (**Rez.**: 53 kHz)

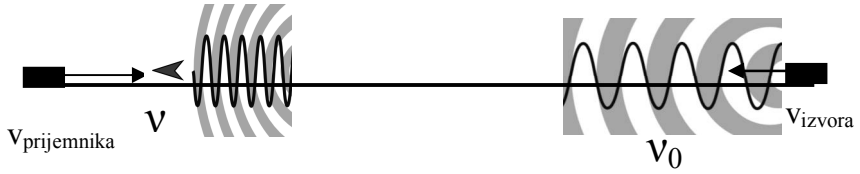
64. Lokomotiva se kreće brzinom 108 km/h i emituje signal trajanja 5 s. Brzina zvuka je 340 m/s. Koliku dužinu signala registruje nepokretni posmatrač
a) kome se lokomotiva približava (**Rez.**: 4,6 s)
b) od koga se lokomotiva udaljuje (**Rez.**: 5,5 s)

65. Brodska sirena emituje zvuk frekvencije 300 Hz. Zvuk nailazi na vertikalnu stenu, odbija se i stiže do broda. Kapetan registruje frekvenciju 310 Hz. Brzina zvuka je 330 m/s. Koliko je udaljena stena ako brodu treba 2 minuta da stigne do nje krećući se stalnom brzinom? (**Rez.**: 650 m)

66. Izvor zvuka frekvencije 1800 Hz približava se nepokretnom rezonatoru koji reaguje na zvučni talas talasne dužine 0,17 m. Kojom brzinom i u kom smeru treba da se kreće izvor zvuka da bi njegovi zvučni talasi izazvali oscilovanje rezonatora. temperatura vazduha je 17 ^{0}C. (**Rez.**:34 m/s)

4. Doplerov efekat – rešenja

Doplerov efekt je pojava da se primljena i emitovana frekvencija razikuju ako se izvor zvuka ili prijemnik kreću.
Posmatramo slučaj kada se izvor i prijemnik kreću jedan ka drugom duž prave koja spaja njihove centre.



ν_0 = emitivana frekvencija
ν = primljena frekvencija
u = brzina zvuka
v_i = brzina izvora
v_p = brzina prijemnika

$$\nu = \nu_0 \frac{u + v_p}{u - v_i}$$

Formulu treba pamtiti uz crtež, jer raspored znakova + i – važi u gornjem slučaju.
I uopšteno, ako se prijemnik i izvor **kreću jedan ka drugom**, primljena frekvencija se **povećava**.
Ako se smer nekoga od njih promeni menja se i odgovarajući znak.
Treba uočiti da bi izraz bio veći, u brojiocu treba da stoji + a u imeniocu – . U skladu sa tim treba pisati znakove.

56. v_1 = 54 km/h; v_2 = 72 km/h; ν_0 = 750 Hz; u = 340 m/s; ν = ?
Ovde, očigledno, policijski auto predstavlja izvor, a prvi auto – koji beži – predstavlja prijemnik.

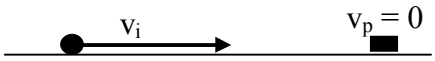
$$\nu = \nu_0 \frac{u - v_1}{u - v_2}$$

Prijemnik (v_1) se kreće od izvora pa se uzima znak – u skladu sa gornjim pravilom.
Za izvor je kao po teoriji.

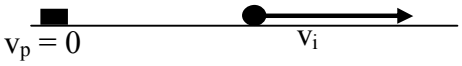
$$\nu = 750 \frac{340 - 15}{340 - 20} \left[Hz \frac{m/s}{m/s} \right] \approx 762\ Hz.$$

uz zadatak 56

57. ν_0 = 600 Hz; v_p = 0; v_i = 40 m/s, u = 340 m/s; $\Delta\nu$ = ?



uz zadatak 57 – prvi slučaj



uz zadatak 57 – drugi slučaj

U prvom slučaju izvor se približava prijemniku, a prijemnik miruje:

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{u}{u - v_i} = 600 Hz \frac{340\, m/s}{300\, m/s} = 680\ Hz.$$

U drugom slučaju izvor se udaljuje: $\nu_2 = \nu_0 \dfrac{u}{u + v_i} = 600 Hz \dfrac{340\, m/s}{380\, m/s} = 537 Hz.$

Razlika je $\Delta\nu$ = 143 Hz.

58. v_i = ?; u = 340 m/s; $v_1 = 3v_2$

Situacija je ista kao u prethodnom zadatku:

$v_1 = v_0 \dfrac{u}{u - v_i}$ pri približavanju $v_2 = v_0 \dfrac{u}{u + v_i}$ pri udaljavanju

$v_1 = 3v_2$

$v_0 \dfrac{u}{u - v_i} = 3v_0 \dfrac{u}{u + v_i}$ ⇒ $u + v_i = 3(u - v_i)$ ⇒ **v_i = u/2 = 170 m/s.**

59. v_1 = 1011 Hz; v_i = 0; v_2 = 993 Hz; u = 340 m/s; $v_{p2} = 3\ v_{p1}$; v_{p1} = ?;

Sada izvor miruje a prijemnik se udaljava od izvora. Znači:

$v_1 = v_0 \dfrac{u - v_{p1}}{u}$, $v_2 = v_0 \dfrac{u - 3v_{p1}}{u}$ Sada je najlakše podeliti jednačine:

$\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{v_0 \dfrac{u - v_{p1}}{u}}{v_0 \dfrac{u - 3v_{p1}}{u}}$ ⇒ $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{u - v_{p1}}{u - 3v_{p1}} \Rightarrow v_1(u - 3v_{p1}) = v_2(u - v_{p1})$ Odavde se posle kraćih

tranformacija dobija (to je lako za specijalce) $v_{p1} = \dfrac{u(v_1 - v_2)}{3v_1 - v_2} = \dfrac{340(1011 - 993)}{3033 - 993}\left[\dfrac{m/s\ Hz}{Hz}\right] = 3\dfrac{m}{s}$

Frekvencija koju emituje izvor možemo izračunati iz prve relacije:

$v_0 = \dfrac{v_1 u}{u - v_{p1}} = \dfrac{1011Hz * 340\,m/s}{340 - 3[m/s]} = 1020Hz.$

60. v_0 = 300 Hz; v = 200 Hz; u = 360 m/s; t = ?

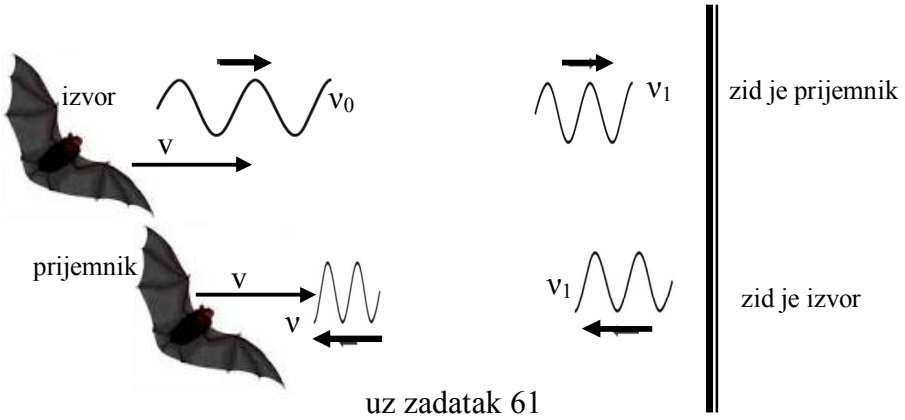
Ako prijemnik registruje nižu frekvenciju onda se udaljuje:

$v = v_0 \dfrac{u - v_p}{u}$ Odavde možemo izračunati brzinu posmatrača ovako:

$u - v_p = \dfrac{uv}{v_0} \Rightarrow v_p = u - \dfrac{uv}{v_0} \Rightarrow v_p = u\left(1 - \dfrac{v}{v_0}\right)$ Zamenom dobijamo **v_p = 120 m/s.**

Za izračunavanje temperature setimo se približne formule: $u=20\sqrt{T}$ odavde je 360 =20 $\sqrt{T}$ ⇒ T = 324 K (Kelvina) U Celzijusima bi to iznosilo t = T – 273 ⇒ **t = 51 ^{0}C.** Ovo bi odgovaralo Sahari.

61. v_0 = 45 kHz; v = 6 m/s; v = ?



uz zadatak 61

a)

U prvom slučaju slepi miš je izvor a zid je prijemnik:

$v_1 = v_0 \dfrac{u}{u - v}$

Važno je zapamtiti da se frekvencija zvuka ne menja pri odbijanju od zida – ostaje v_1

Na slici se vidi ko je ko u drugom slučaju:

$v = v_1 \dfrac{u + v}{u}$

Kombinovanjem prethodnih formula dobijamo:

$v = v_0 \dfrac{u + v}{u - v}$ Brojna vrednost je: $v = 45kHz \dfrac{340 + 6}{340 - 6} = 46{,}62\ kHz.$

b) Slučaj da se slepi miš udaljuje od stene rešićemo elegantno –
u gornjem primeru umesto v stavićemo – v

Tako da imamo gotovu formulu: $\nu = \nu_0 \frac{u - v}{u + v}$ Zamenom se dobija ν = 43,44 kHz.

62. v_1 = 50 m/s; v_2 = 40 m/s; ν_0 = 500 Hz; ν = ?
Ovaj zadatak ima istu ideju kao i prethodni, sa slepim mišom, sama što je sad „stena“ pokretna tj. prijemnik beži od izvora.

uz zadatak 62

Prvo je v_2 izvor, a v_1 prijemnik, **opet je odbijena frekvencija ista**, pa je sad v_1 izvor a v_2 prijemnik.
Niz formula izgleda ovako:

$\nu_1 = \nu_0 \frac{u - v_1}{u - v_2}$ sada se frekvencija ν_1 se odbija od auta ispred, on je sad izvor, a auto iza je prijemnik.

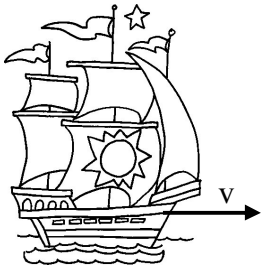
$\nu_{kon} = \nu_1 \frac{u + v_2}{u + v_1}$ Zamenom se dobija $\nu_{kon} = \nu_0 \frac{u - v_1}{u - v_2} \frac{u + v_2}{u + v_1}$

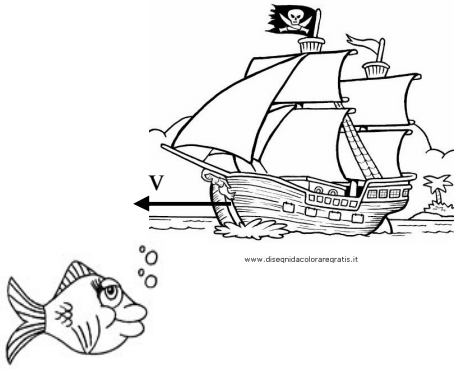
Konačna frekvencija je ν_{kon} = 471 Hz.

63. v = 10 m/s; ν_0 = 50 kHz; ν = ?
Oprobajte svoju moć zaključivanja na ovom primeru!
Rezultat je:

$\nu = \nu_0 \frac{(u + v)^2}{(u - v)^2}$ **Brojna vrednost ν = 53 kHz.**

Nagradno pitanje: **Da li je sve u redu sa zastavicama na levom brodu?**





uz zadatak 63

64. v = 108 km/h = 30 m/s; t = 5 s; u = 340 m/s; Δt = ?
a) Lokomotiva se približava posmatraču:
Početak emitovanja signala posmatrač čuje posle vremena: $t_1 = \frac{d}{u}$

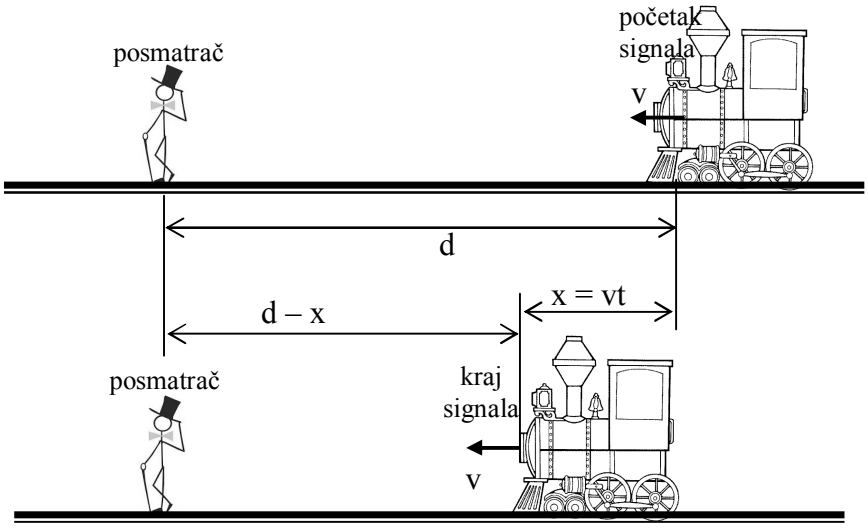
Za vreme trajanja signala t voz se približi posmatraču za x = vt.
Kraj signala posmatrač „čuje“ posle:

$t_2 = t + \frac{d - vt}{u}$

Trajanje signala za posmatrača je:

$\Delta t = t_2 - t_1 = t + \frac{d - vt}{u} - \frac{d}{u}$

$\Delta t = t\left(1 - \frac{v}{u}\right) = 4{,}61\ s.$



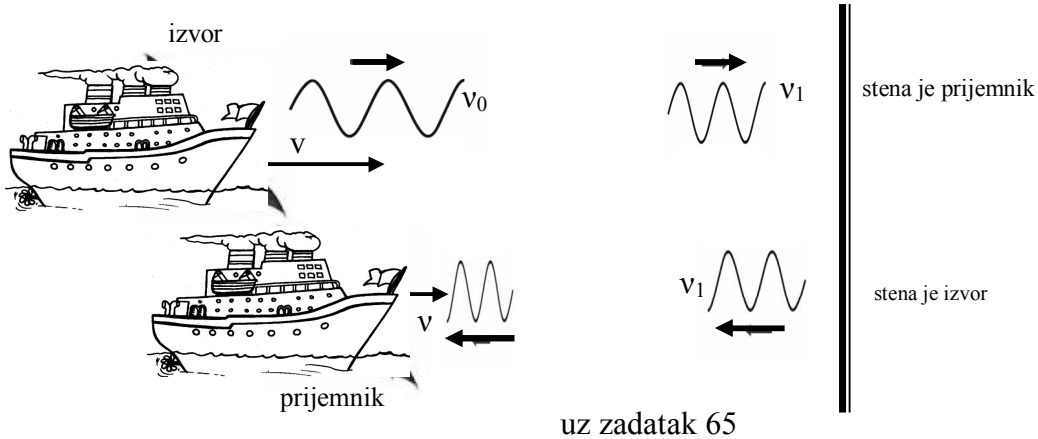
uz zadatak 64

b) Ako se lokomotiva udaljava od posmatrača:

$\Delta t = t\left(1 + \frac{v}{u}\right) = 5{,}44\ s$ - način rada prepuštam čitaocima (elegantno ili postepeno)

65. ν_0 = 300 Hz; ν = 310 Hz; u = 330 m/s; t = 2 min; d = ?

Potrebno je izračunati brzinu broda. Način izračunavanja je isti kao i sa slepim miševima. (Uostalom ideja za brodski sonar je pozajmljena od slepog miša). Ipak, preporučujem da ponovite ceo postupak (uz pomoć slike) – vežbe radi. Na takmičenju će se priznaje samo kompletan postupak.



uz zadatak 65

Veza između frekvencija je dakle:

$\nu = \nu_0 \dfrac{u+v}{u-v}$ Odavde, unakrsnim množenjem i grupisanjem članova dobijamo **(PET)**: $v = \dfrac{u(\nu - \nu_0)}{\nu + \nu_0} = 5{,}41\dfrac{m}{s}$ Daljina stene je d = vt = 5,41m/s∗120 s ≈ 650 m.

66. ν_0 = 1800 Hz; λ = 0,17 m; t = 17 ^{0}C; v = ?

Ako je data temperatura vazduha možemo izračunati brzinu zvuka: T = t + 273 ⇒ T = 290 K.

$u = 20\sqrt{T} = 20\sqrt{290} = 340\,m/s.$

Rezonator će reagovati na frekvenciju: $\nu = \dfrac{u}{\lambda} = \dfrac{340\,m/s}{0{,}17m} = 2000Hz.$

Znači izvor zvuka mora ići ka rezonatoru da bi se frekvencija povećala zahvaljujući Doplerovom efektu.

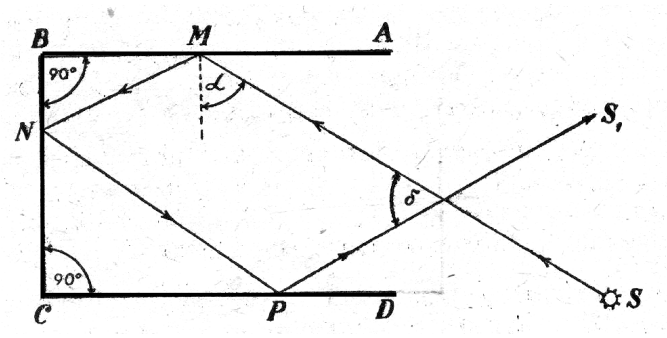
$\nu = \nu_0 \dfrac{u}{u - v_i}$ odavde je $v_i = u\left(1 - \dfrac{\nu_0}{\nu}\right) = 340[m/s]\left(1 - \dfrac{1800}{2000}\right) = 34\dfrac{m}{s}.$

5. Odbijanje svetlosti

5.1. Ravna ogledala

67. Sunčevi zraci padaju pod uglom 24^0 prema horizontu. Pod kojim uglom treba postaviti ravno ogledalo u odnosu na horizomt da bi Sunčevi zraci posle odbijanja bili horizontalni. (**Rez.:** 102^0)

68. Ravna ogledala AB, BC, i CD imaju međusobne položaje kao na slici. Iz tačkastog svetlosnog izvora S pada svetlosni zrak na sistem ogledala pod uglom $\alpha = 60^0$ kao što je prikazano na slici. Naći ugao δ između upadnog i izlaznog zraka. (**Rez.:** 60^0)

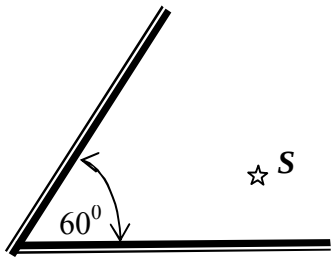


uz zadatak 68

69. Dva ravna paralelna ogledala udaljena su jedno od drugog za 40 cm. Svetlosni izvor nalazi se među njima na rastojanju 10 cm od jednog ogledala. Odrediti razdaljine pojedinog ogledala od tri najbliža lika svetlosnog izvora. (**Rez.:** rastojanja od prvog ogledala su: 10 cm,70 cm, 90 cm, a od drugog: 50 sm, 30 cm, 50 cm.)

70. Tačkasti svetlosni izvor i njegova dva lika dobijena pomoću dva ravna ogledala leže u temenima jednakostraničnog trougla. Odrediti ugao između ogledala. (**Rez.:** 120^0)

71. Dva ravna ogledala zaklapaju ugao od 60^0. Među ogledalima se nalazi tačkasti svetlosni izvor. Koliko likova svetlosnog izvora će stvarati ogledala? Nacrtati položaje likova. (**Rez.:** ima 5 likova)



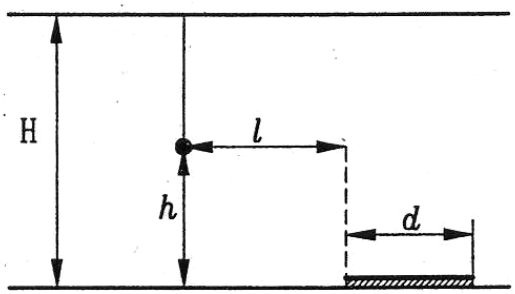
uz zadatak 71

72. U sobi visine H = 4 m, na rastojanju h = 2,5 m od poda, visi sijalica. Ravno ogledalo prečnika d = 5 cm leži na podu na horizontalnom rastojanju *l* od sijalice – kao na slici. Koliki je prečnik svetlog kruga na plafonu ako je a) *l* = 0,5 m, b) *l* = 1,5 m? (**Rez.:** 13 cm)

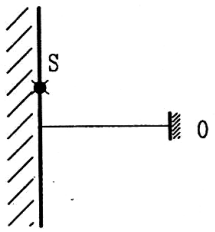
73. Malo ravno ogledalo *O* postavljeno je paralelno sa zidom – kao na slici. Na zidu je učvršćen svetlosni izvor *S*. Svetlost pada na ogledalo, odbija se daje svetlu mrlju na zidu. Kolikom brzinom će se kretati svetla mrlja po zidu ako se ogledalo:
a) približava brzinom v; (**Rez.:** 0)
b) kreće paralelno sa zidom brzinom v. (**Rez.:** 2v)

74. Predmet se kreće duž normale na ravnom ogledalu brzinom 2 cm/s. Kolikom brzinom se menja rastojanje predmeta i njegovog lika u ogledalu? (**Rez.:** 4 cm/s)

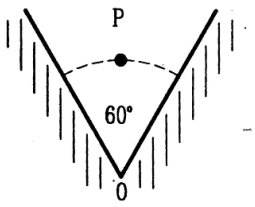
75. Dva ravna ogledala postavljena su pod uglom 60^0. Na simetrali tog ugla, između njih, postavljen je predmet – kao na slici. Koliko je rastojanje među prvim imaginarnim likovima u ogledalima? Rastojanje od temena do predmeta je 12 cm. (**Rez.:** $12\sqrt{3}$ cm)



uz zadatak 72



uz zadatak 73

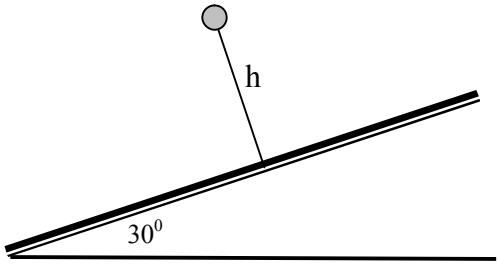


uz zadatak 75

76. Koliku najmanju veličinu (visinu – H) treba da ima ravno ogledalo, postavljeno na zidu, da bi čovek, visine 1,72 m, mogao da vidi ceo svoj lik? Čovekove oči se nalaze na visini 1,60 m od poda. (**Rez.:** 0,86 m)

77. Sunčevi zraci padaju na horizontalno postavljeno ogledalo pod uglom od 20^0. Za koliki minimalni ugao treba okrenuti ogledalo da bi odbijeni zraci bili horizontalni? (**Rez.:** 35^0)

78. Ravno ogledalo je postavljeno pod uglom 30^0 u odnosu na horizont. Kuglica je podignuta tako da se nalazi na normalnom rastojanju h = $\sqrt{3}$ m od ogledala i puštena da pada u polju Zemljine teže. Odrediti brzinu kuglice u odnosu na njen lik neposredno pre nego što kuglica udari u ogledalo. (**Rez.:** 17,2 m/s)



uz zadatak 77

79. Lastavica poleti sa vrha stabla visine 10 m, koje se nalazi na obali jezera, u toku leta dodirne površinu jezera u nekoj tački, i zaustavi se na vrhu tornja visine 100 m koji je na drugoj obali jezera. Rastojanje između stabla i tornja je 500 m.
a) Nađi u kojoj tački lastavica dodirne površinu jezera, ako leti njkraćim mogućim putem. (**Rez.: na 45,46 m** od drveta**)**
b) Izračunati vreme za koje lastavica preleti taj put ako leti srednjom brzinom 10m/s. (**Rez.:** 51,2 s)

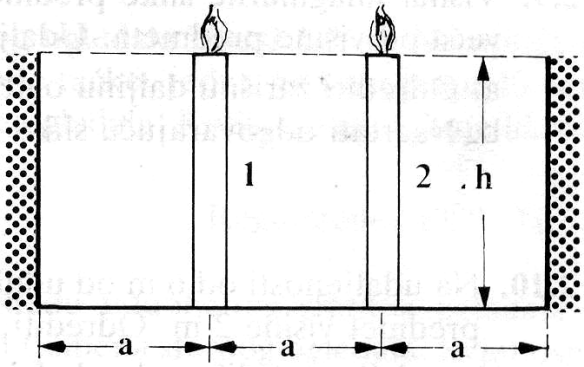
Za rešavanje ovog zadatka treba da znamo još nešto o svetlosti:

Svetlost se prostire putem za koji treba najmanje vreme.

Ako je sredina svuda istih svojstava – kaže se homogena – gornji princip glasi:

Svetlost se prostire najkraćim mogućim putem.

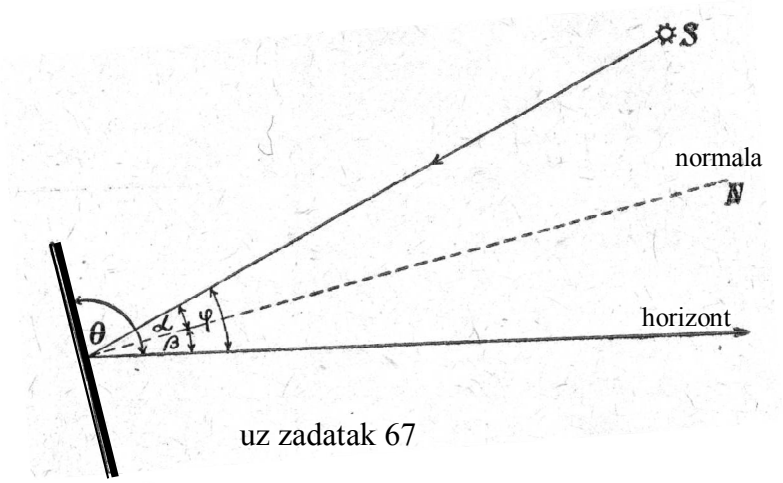
80. Dve sveće jednakih visina (90 cm) nalaze se na međusobnom rastojanju **a** koje je jednako udaljenosti između sveće i najbližeg zida – vidi sliku. Kolikom brzinom će se će se smanjivati senke sveća po zidovima ako jedna sveća sagori za 10 minuta, adruga za 15 minuta. (**Rez.:** 12 cm/s; 3 cm/s)



uz zadatak 79

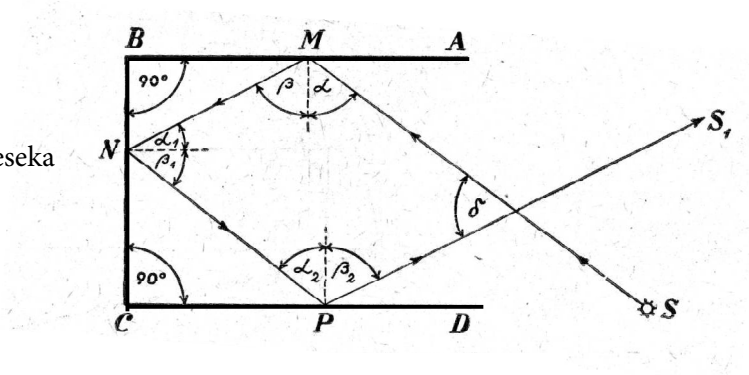
5.1. Ravna ogledala - rešenja

67. $\varphi = 24^0$; $\theta = ?$
Po zahtevu zadatka $\varphi = \alpha + \beta$. Prema zakonu odbijanja svetlosti $\alpha = \beta$
pa je $\alpha = \beta = 12^0$
Traženi ugao $\theta = 90^0 + \beta = 102^0$



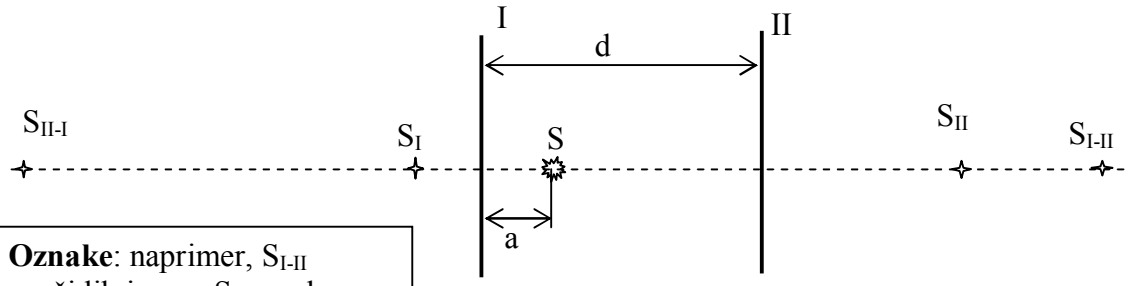
uz zadatak 67

68. Uglove obeležimo kao na slici. Svi parovi α i β su međusobno jednaki po zakonu odbijanja svetlosti. Ako je $\alpha = 60^0$ onda je i $\beta = 60^0$. Lako je videti da je $\beta + \alpha_1 = 90^0$, pa je $\alpha_1 = 30^0$. Sa istom lakoćom zaključujemo da je $\beta_1 + \alpha_2 = 90^0$ pa je $\alpha_2 = 60^0$. Onda je i $\beta_2 = 60^0$. Dalje je $\delta = 180^0 - (\alpha + \beta_2)$ i konačno $\delta = 60^0$.
Lakoća je u tome da produžimo normale do uzajamnog preseka



69. d = 40 cm; a = 10 cm.

Ogledalo I daje lik S_I izvora S i, očigledno je, a_1 = 10 cm njegovo rastojanje od tog ogledala. Lik izvora S u ogledalu II je S_{II} pa je njegovo rastojanje od istog ogledala b_1 = 30 cm, a od prvog I : S_{II} = 70 cm (30 + 30 + 10)
Lik S_I daje svoj lik $S_{I\text{-}II}$ u ogledalu II tako da je I : SI-II = 90 cm (40 + 50)
da je I : $S_{I\text{-}II}$ = 90 cm (istovremeno je II : $S_{I\text{-}II}$ = 50 cm). Lik S_{II} daje svoj lik $S_{II\text{-}I}$ u ogledalu I pa je I: $S_{II\text{-}I}$ = 70 cm, (istovremeno je II : $S_{II\text{-}I}$ = 110 cm).

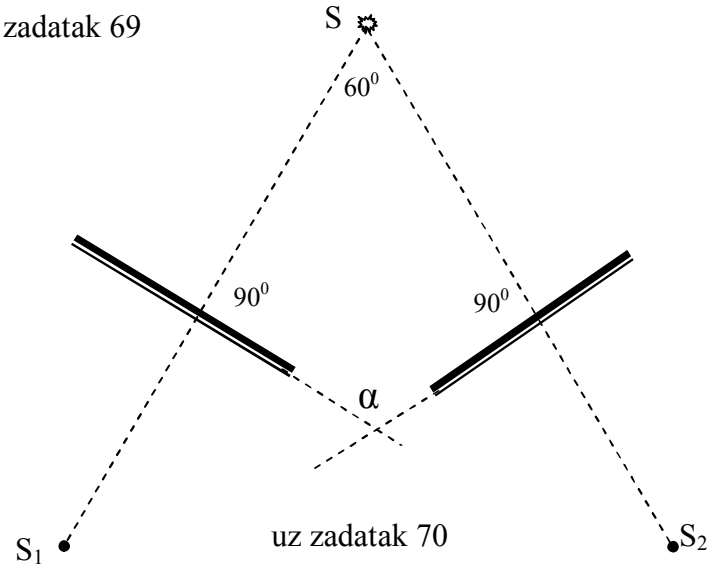


uz zadatak 69

Oznake: naprimer, $S_{I\text{-}II}$ znači lik izvora S prvo kroz prvo ogledalo (S_I) pa kroz drugo ogledalo

Da li ste bili u poslastičarnici koja ima ogledala na dva suprotna zida?

70. Svako ogledalo treba da deli rastojanje između izvora i odgovarajućeg lika na dva jednaka dela i da je na tom rastojanju normalno. Ugao između ogledala je $\alpha = 120^0$.

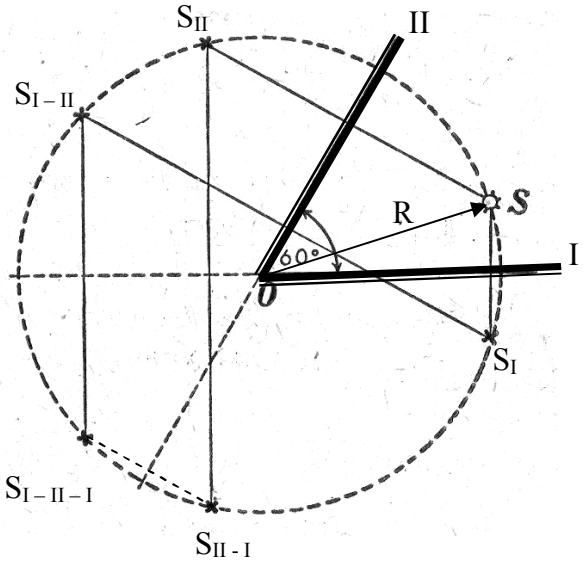


uz zadatak 70

71. Treba nacrtati krug sa centrom u preseku ogledala i poluprečnikom OS. Svi likovi će se naći na tom krugu. Za prva dva lika je to očigledno, a i za sledeće jer predmet i lik su simetrični u odnosu na osu ogledala. Lik kroz jedno ogledalo predstavlja predmet za drugo ogledalo. Niz se prekida kada se lik nađe iza sledećeg ogledala. Naprimer S_{I-II-I} (to je lik kroz prvo pa drugo pa opet prvo) i sad se našao iza drugog i niz se prekida. Obratiti pažnju da je lik S_{II-I} (kroz drugo pa prvo) još uvek ispred drugog ogledala i daje lik koji se poklapa sa S_{I-II-I} pa se on samo jednom računa. **Znači ima ukupno 5 likova.**

Predlažem da uradite ovaj zadatak ako je u pitanju ugao **od 90^0** (Imaće ukupno 3 lika – dva se poklapaju)

Za strpljivije predlažem da urade ogledala sa 30^0 između njih - imaće 11 likova!



uz zadatak 71

72. H = 4 m; h = 2,5 m; d = 5 cm; D = ?.

Ako se nacrta lik sijalice u ogledalu usled simetrije izgledaće kao da svetlosni zraci polaze od imaginarnog izvora S' i formiraju svetlu mrlju na plafonu D = A'B'.

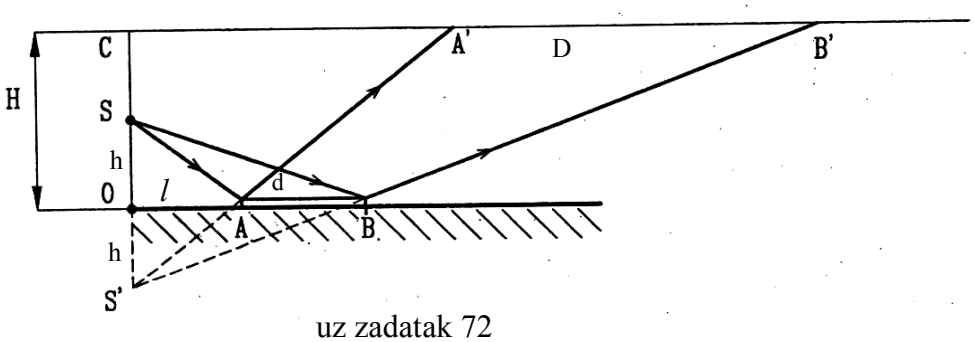
Dalje ćemo koristiti sličnost trouglova:

ΔS'A'C ~ ΔS'AO

Odavde je

$$\frac{S'C}{A'C} = \frac{S'O}{AO} \Rightarrow \frac{H+h}{A'C} = \frac{h}{l} \Rightarrow$$

$$A'C = \frac{(H+h)l}{h}$$



uz zadatak 72

Iz sličnosti trouglova ΔS'B'C ~ ΔS'BO izračunavamo B'C:

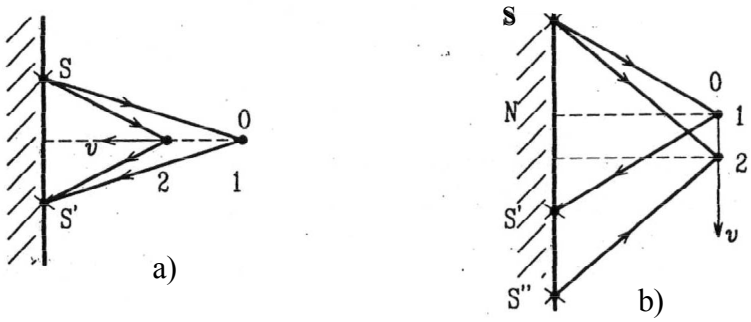
$$B'C = \frac{(H+h)(l+d)}{h}$$

Prečnik svetle mrlje dobijamo oduzimanjem ova dva izraza: D = B'C – A'C

$D = \frac{H+h}{h} d = 13\ cm$. Veličina svetle mrlje na plafonu ne zavisi od od položaja ogledala tj. od ***l*** !

73. a) Sa slike bi trebalo da bude jasno da ako se ogledalce kreće duž normale na zid zbog pravolinijskog prostiranja svetlosti i zakona odbijanja svetla mrlja ostaje nepokretna $\mathbf{v_{mrlja} = 0}$.

b) Rastojanje između izvora svetlosti i svetle mrlje (SS') je dva puta veće od rastojanja izvora do normale (SN). Tako, ako se N pomeri za s, svetla mrlja će se pomeriti za 2s (S'S" = 2s). Konačno je $\mathbf{v_{mrlja} = 2v}$.

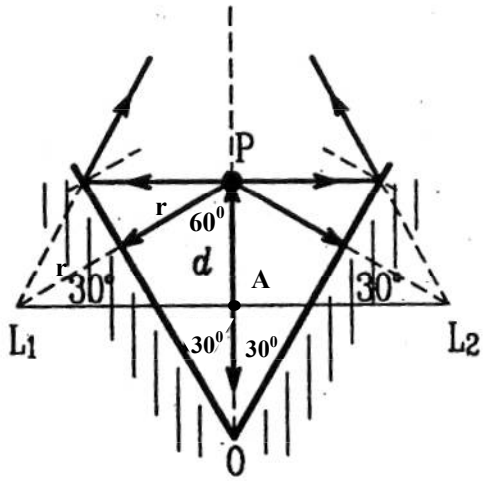


uz zadatak 73

74. Ako se rastojanje predmeta i ogledala promeni za s rastojanje predmeta i lika promeni se za 2s za isto vreme. Znači rastojanje predmet – lik menja se brzinom 2∗2 cm/s = **4 cm/s.**

75. d = 12 cm – rastojanje predmeta do temena (PO).
Na crtežu su prikazani prvi imaginarni likovi L_1 i L_2. Ako se setimo svojstava jednakostraničnog trougla, zaključujemo: r = d/2 = 6 cm. Onda je rastojanje predmeta do lika PL_1 = 12 cm. Dalje je L_1A visina jednakostraničnog trougla stranice 12 cm. Traženo rastojanje je $L_1L_2 = 2L_1A$.

Konačno je: $L_1L_2 = 2\frac{12\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}cm.$



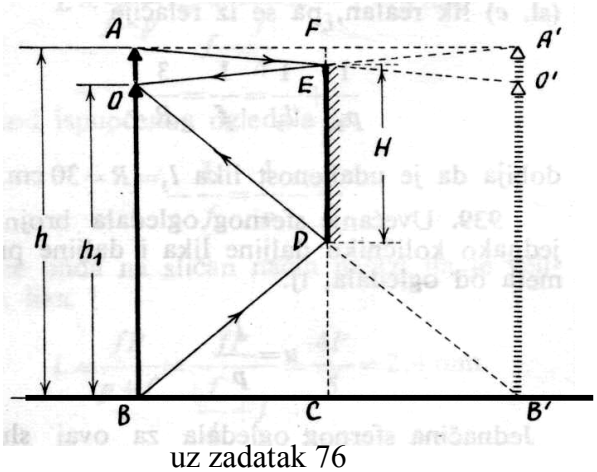
uz zadatak 75

76. h = 1,72 m; h_1 = 1,60 m; H = ? AB = čovek

Ogledalo treba tako postaviti i čovek treba tako da stane da mu do očiju (O) dolaze zraci od krajnjih tačaka lika: od cipela i od vrha glave preko ivica ogledala. Pošto je ogledalo po definiciji na sredini rastojanja između predmeta i lika treba da se setimo srednje linije trougla. To je upravo H za trougao ΔO B'A' . Kako je A'B' = h sledi da je **H = h/2 = 0,86 m.**
Visinu kačenja ogledala možemo odrediti ovako:
iz trougla ΔOB'B sledi CD = $h_1/2$ = 0,80 m.

Tačka E se nalazi na visini:

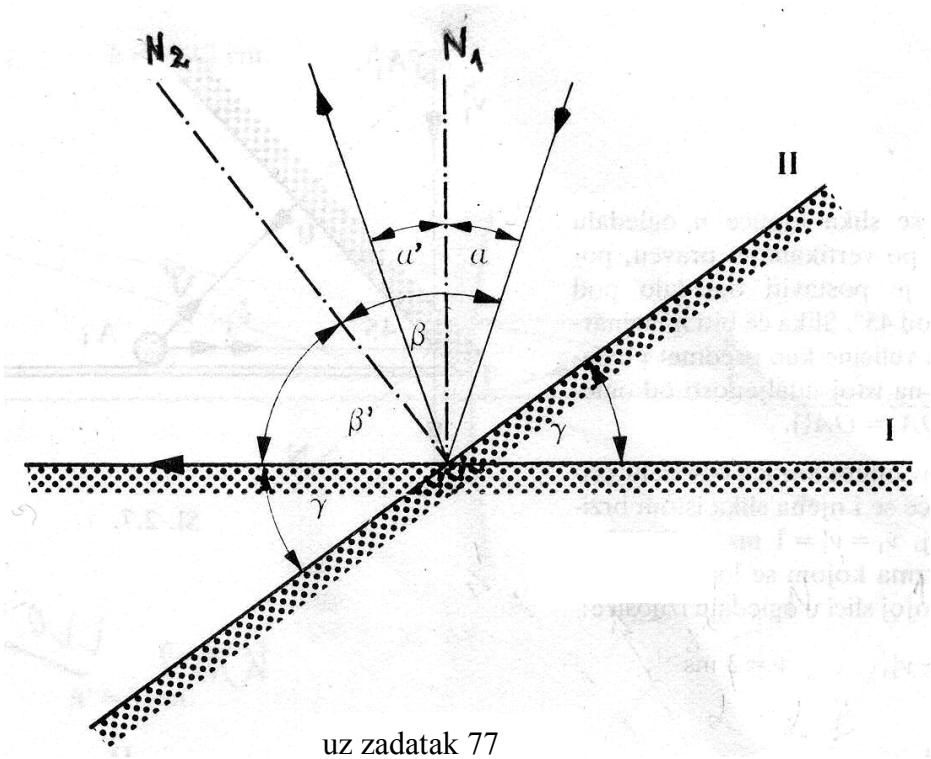
CE = CD + H = 1,66 m.



uz zadatak 76

77. α = 20^0; γ = ?.

Uočiti da je β' + β = $90^0 + 20^0$
Ova dva ugla su jednaka po zakonu odbijanja svetlosti pa je **β = 55^0**
Takođe je β' + γ = 90^0 (ugao između novog položaja ogledala i njegove normale)
Znači **γ = 35^0**



uz zadatak 77

78. $\alpha = 30^0$, $h = \sqrt{3}$ m; v_{pribl} = ? (brzina približavanja kuglice i njenog lika)

Plan: Treba naći komponentu brzine usmerenu normalno na ogledalo $\mathbf{v_n}$ pa je onda tražena brzina $\mathbf{v_{pribl} = 2v_n}$.

Brzina slobodnog pada kuglice je $v = \sqrt{2gh_1}$

Ako se setimo svojstava jednakostraničnog trougla:

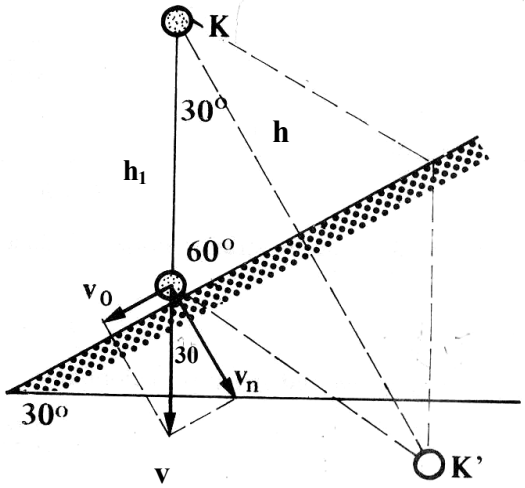
$$h = \frac{h_1\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h_1 = 2m.$$ Znači

$$v = \sqrt{2*10\,m/s^2 * 2m} = 6{,}32\,m/s.$$

Opet jednakostranični trougao:

$$v_n = \frac{v\sqrt{3}}{2} = \frac{6{,}32\,m/s*1{,}73}{2} \approx 5{,}5\frac{m}{s}.$$

Brzina kuglice u odnosu na lik je $\mathbf{v_{pribl} = 2v_n \Rightarrow v_{pribl} \approx 11\ m/s}$.



uz zadatak 79

79. h = 10 m; H = 100 m; L = 500 m; v = 10 m/s.

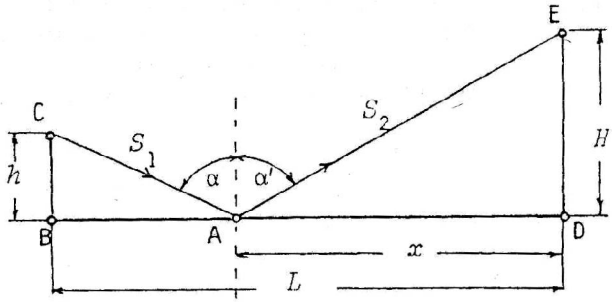
Prema principu koji smo naveli, **lastavica treba da prati putanju svetlosnog zraka.**

Na osnovu zakona odbijanja važi α = α'. Prema tome sledeći trouglovi su slični:

ΔBAC ~ Δ ADE onda važi:

$$\frac{h}{L-x} = \frac{H}{x} \Rightarrow x = \frac{LH}{H+h} = 454{,}54\ m.$$

BA = 45,46 m.



uz zadatak 78

Za vreme leta treba izračunati put lastavice s_1 i s_2. Za to ćemo upotrebiti Pitagorinu teoremu:

$$s_1 = \sqrt{h^2 + (L-x)^2} = \sqrt{10^2 + 45{,}46^2} = 46{,}55\ m. \quad s_2 = \sqrt{x^2 + H^2} = \sqrt{454{,}54^2 + 100^2} = 465{,}41\,m.$$

Ukupan put je $s = s_1 + s_2$ = 46,55 + 465,41 = 511,96 m. **Vreme leta je t = s/v = 51,2 s.**

80. h = 90 cm; t_1 = 10 min; t_2 = 15 min; v_{s1} = ? ; v_{s2} = ?

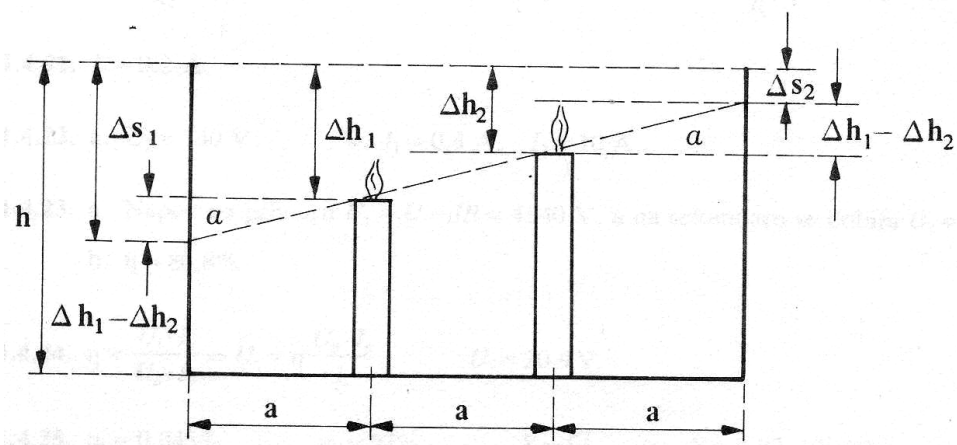
Brzina sagorevanja sveća su:

$$v_1 = \frac{h}{t_1} = \frac{90\,cm}{10\,min} = 9\frac{cm}{min}$$

$$v_2 = \frac{h}{t_2} = \frac{90\,cm}{15\,min} = 6\frac{cm}{min}$$

Treba nacrtati situaciju posle nekog vremena t (pre nego što sveće potpuno izgore).

Δh_1 je smanjenje visine prve sveće **($\Delta h_1 = v_1 t$)**, a Δh_2 je smanjenje visine druge sveće **($\Delta h_2 = v_2 t$).**



uz zadatak 80

Δs_1 je pređeni put senke prve sveće, Δs_2 pređeni put druge sveće.

Sada treba pažljivo proučiti crtež. Treba uočiti da je $\Delta s_1 = \Delta h_1 + (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\,\Delta h_1 - \Delta h_2$.

Ako zamenimo izraze za smanjivanje visine: $\Delta s_1 = (2v_1 - v_2)t$

Slično za drugu senku: $\Delta s_2 = \Delta h_2 - (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\,\Delta h_2 - \Delta h_1 = (2v_2 - v_1)t$

Brzine senki su: $v_{s1} = \frac{\Delta s_1}{t} = 2v_1 - v_2 = 12\frac{cm}{min}$, $v_{s2} = \frac{\Delta s_2}{t} = 2v_2 - v_1 = 3\frac{cm}{min}$.

5.2 Sferna ogledala

81. Konkavno (udubljeno) sferno ogledalo daje realan lik koji je 3 puta veći od predmeta. Kolika je žižna daljina ogledala, ako je rastojanje između predmeta i njegovog lika 20 cm. (**Rez.:** 7,5 cm)

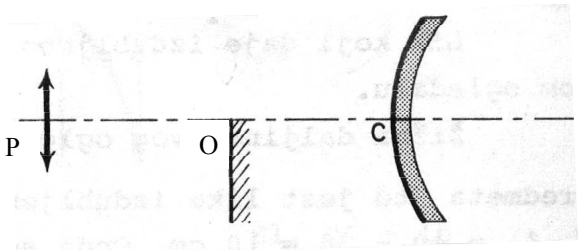
82. Svetao predmet se nalazi na rastojanju $p = \frac{4}{3}f$ od konveksnog (ispupčenog) ogledala. Gde će se nalaziti lik ovog predmeta? Koliko je uvećanje ogledala u ovom slučaju? (**Rez.:** 0,43)

83. Izdubljeno sferno ogledalo ima poluprečnik krivine 40 cm. Na rastojanju 60 cm od temena ogledala nalazi se osvetljen predmet visine 4 cm. Gde se nalazi, kakav je i koliki je lik toga predmeta? Odgovoriti na ista pitanja kada je predmet u centru krivine ogledala, kada je u njegovoj žiži i u tački koja je udaljena od temena ogledala za 5 cm. (**Rez.:** 30 cm, 2 cm; 40 cm, 4 cm; ∞; 20/3, 5,3)

84. Ispupčeno sferno ogledalo daje lik tri puta manji od predmeta. Odrediti rastojanje predmeta od lika ako je žižna daljina ogledala 24 cm. (**Rez.:** 64 cm)

85. Realan lik predmeta koje daje udubljeno ogledalo uvećan je tri puta. Ako se predmet približi ogledalu za 3 cm, lik će ostati realan i uvećan 6 puta. Kolika je daljina predmeta u prvom slučaju i kolika je žižna daljina? (**Rez.:** 24 cm; 18 cm)

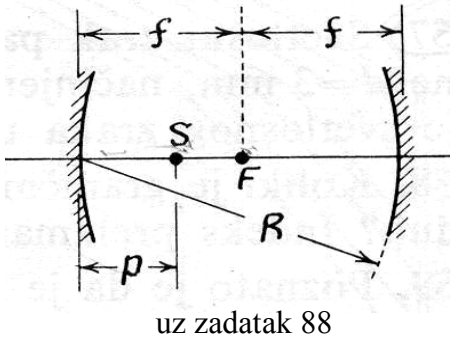
86. Za određivanje žižne daljine ispupčenog ogledala C predmet P se postavi prema njemu jedno ravno ogledalo O se stavi između predmeta i ispupčenog ogledala – kao na slici. Svako ogledalo obrazuje lik predmeta P. Ravno ogledalo se pomera paralelno samo sebi duž ose PC dok se položaji ta dva lika ne poklope. Kolika je žižna daljina konveksnog ogledala ako se pri ovom ogledu dobilo PO = 24 cm; OC = 16 cm? (**Rez.:** 10 cm)



uz zadatak 86

87. Obe strane sferne površine deluju kao ogledalo. Poluprečnik krivine površine je 28 cm. Sa jedne i sa druge strane takvog ogledala je postavljen po jedan svetao predmet na podjednakim rastojanjima 34 cm od temena ogledala.Visina predmeta ispred udubljene strane je 2,8 cm. Kolika treba da je visina predmeta ispred ispupčene strane ogledala da bi likovi oba predmeta imali jednake visine? (**Rez.:** 6,73cm)

88. Dva konkavna (udubljena) ogledala postavljena su jedno nasuprot drugom tako da im se žiže poklapaju (f = 30 cm). Svetla tačka S je postavljena je na zajedničkoj optičkoj osi na rastojanju 20 cm od prvog ogledala. Gde se nalazi lik svetle tačke S posle odbijanja svetlosnih zrakova od oba ogledala? (**Rez.:** Lik je na istom mestu kao i predmet)

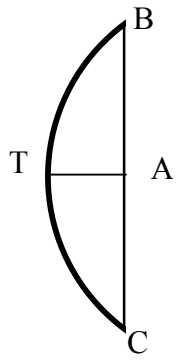


uz zadatak 88

89. Udubljeno i ispupčeno sferno ogledalo jednakih žižnih daljina od po 5 cm nalaze se međusobno udaljeni 40 cm. Predmet koji se nalazi između njih je udaljen je 7,5 cm od temena udubljenog ogledala. Svetlost sa predmeta ide prvo na udubljeno, a zatim na ispupčeno ogledalo. Koliko je udaljena konačna slika predmeta od udubljenog ogledala? (**Rez.:** 44,2 cm)

90. Konkavno i konveksno sferno ogledalo jednakih poluprečnika krivine r postavljena su na međusobnom rastojanju d (d > r) tako da im se optičke ose poklapaju. Na kom rastojanju p od temena konkavnog ogledala treba da se nalazi osvetljen predmet pa da njegovi likovi u oba ogledala budu jednakih visina? (**Rez.:** $p_1 = \frac{d+2f}{2}$)

91. Ispred izdubljenog sfernog ogledala, prikazanom na slici, na glavnoj optičkoj osi, nalazi svetla strelica, na udaljenosti 30 cm od temena. Naći udaljenost lika od temena T i uvećenje ogledala, ako je TA = 2 cm, BC = 20 cm. (**Rez.:** 23 cm; 0,77)

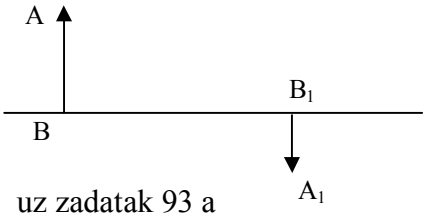


uz zadatak 91

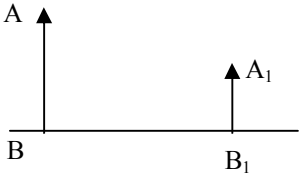
92. Ispred udubljenog ogledala radijusa krivine 10 cm nalazi se ravno ogledalo odaljeno 20 cm od temena sfernog ogledala. Predmet koji se nalazi između njih udaljen je 15 cm od temena sfernog ogledala i visok 4 cm. Odrediti:
a) Položaj i veličinu konačnog lika u odnosu na sferno ogledalo ako svetlosni zraci sa predmeta idu prvo na ravno ogledalo. (**Rez.:** 8,3 cm; 1,33 cm)
b) Položaj i veličinu konačnog lika u odnosu na sferno ogledalo ako svetlosni zraci sa predmeta idu prvo na sferno ogledalo. (**Rez.:** 32,5 cm; 2 cm)

Proverite svoje znanje crtanje likova u raznim slučajevima sfernih ogledala

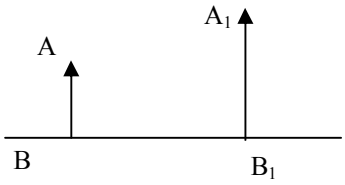
93. Pomoću sfernog ogledala dobijen je lik A_1B_1 predmeta AB (slika). Konstrukcijom odrediti položaj ogledala i njegovu žižu. Odrediti i karakter ogledala – da li je konkavno ili konveksno.



uz zadatak 93 a

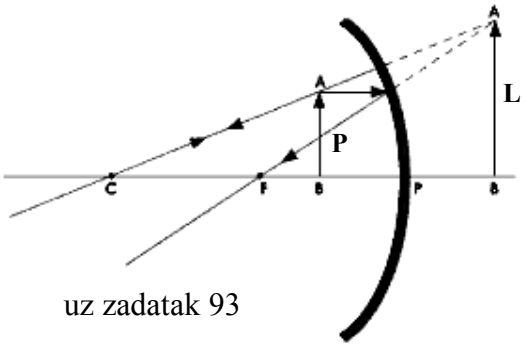


uz zadatak 93 b

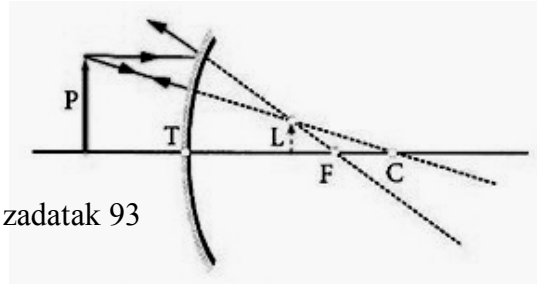


uz zadatak 93 c

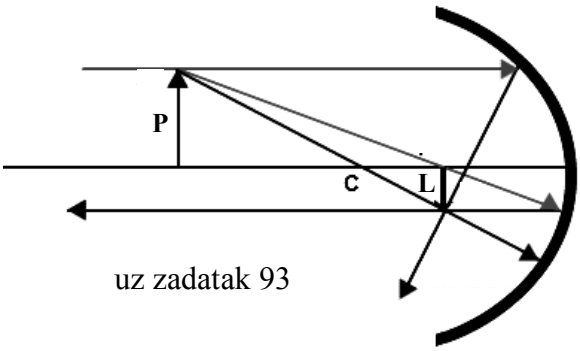
Za svaki slučaj, prethodno proučite sledeće crteže:



uz zadatak 93



uz zadatak 93



uz zadatak 93

5.2. Sferna ogledala – rešenja

81. u =3; d = 20 cm; f = ?

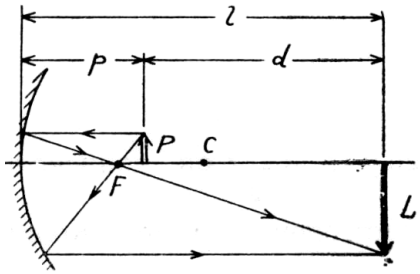
Da bi uvećanje ogledala bilo veće od jedan i lik bio realan, predmet treba da je između centra krivine i žiže.

Sa slike je d = $l - p$, uvećanje je po definiciji $u = \frac{l}{p}$ odavde je l = 3p.

zamenom u izraz za rastojanje: 20 cm = 3p – p

dobijamo **p = 10 cm; *l* = 30 cm.** Primenićemo jednačinu ogledala:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow f = \frac{pl}{p+l}$ zamenom dobijamo: **f = 7,5 cm.**

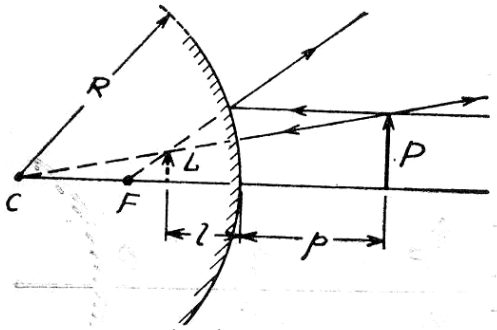


uz zadatak 81

82. p = $\frac{4}{3}f$; l = ?; u = ?

Lik kod ispupčenog ogledala se nalazi u preseku produžetaka zrakova. Zato se kaže da je on imaginaran. Obratiti pažnju da je iz istih razloga i žiža imaginarna. Jednačina ogledala zato izgleda ovako: (ispred svake imaginarne veličine piše se minus)

$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}$ Udaljenje lika je: $l = \frac{pf}{p+f} = \frac{\frac{4}{3}f * f}{\frac{4}{3}f + f} = \frac{4}{7}f$



uz zadatak 82

uvećanje je: $u = \frac{l}{p}$=3/7 ≈ 0,43

Treba naglasiti da je **kod konveksnog ogledala uvek ovakva slika bez obzira gde je predmet!** (lik umanjen i imaginaran). Kod konkavnog ogledala postoje razni slučajevi u zavisnosti od položaja predmeta.

83. r = 40 cm; p = 60 cm; P = 4 cm; l = ?; L = ?

Žižna daljina je $f = \frac{r}{2} = 20\,cm$

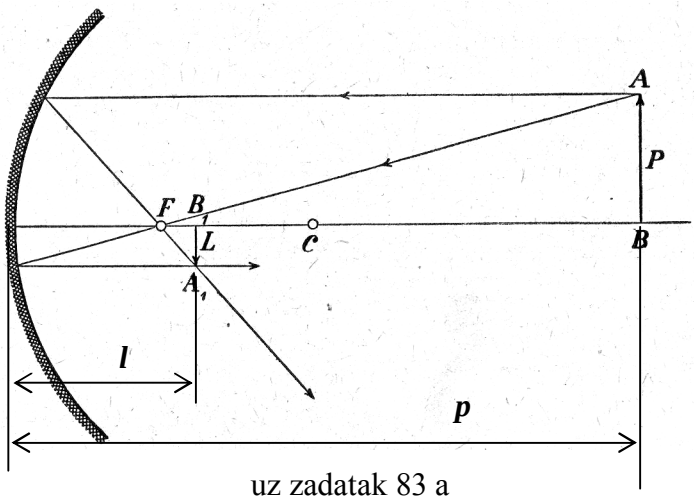
a) Predmet se nalazi dalje od centra krivine – lik je realan umanjen i izvrnut. Jednačina ogledala je:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f} = \frac{60cm * 20cm}{60cm - 20cm} = 30\,cm$

Uvećanje je po definiciji:

$u = \frac{L}{P}$, $u = \frac{l}{p}$ Izjednačavanjem ova dva izraza:

$L = \frac{l}{p}P = \frac{30cm}{60cm}4cm = 2\,cm.$



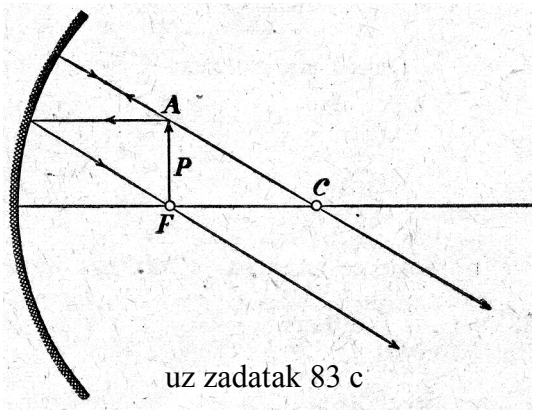
uz zadatak 83 a

b) Ako je predmet u centru krivine i lik će biti u centru krivine, realan, izvrnut i iste veličine kao i predmet.

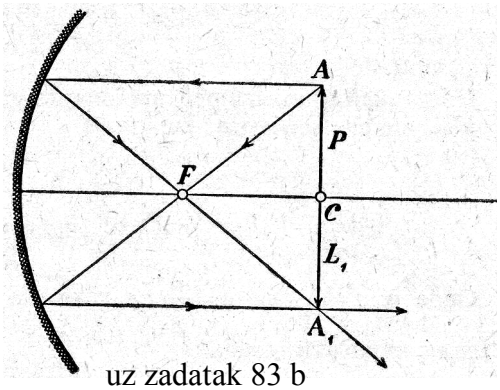
f = 20 cm; p = 40 cm; l = ? L = ?

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f} = \frac{40cm * 20cm}{40cm - 20cm} = 40\,cm.$ $L = \frac{l}{p}P = \frac{40cm}{40cm}4cm = 4\,cm.$

c) Ako je predmet u žiži lik je u beskonačnosti – tj. karakteristični zraci su paralelni – vidi sliku.



uz zadatak 83 c

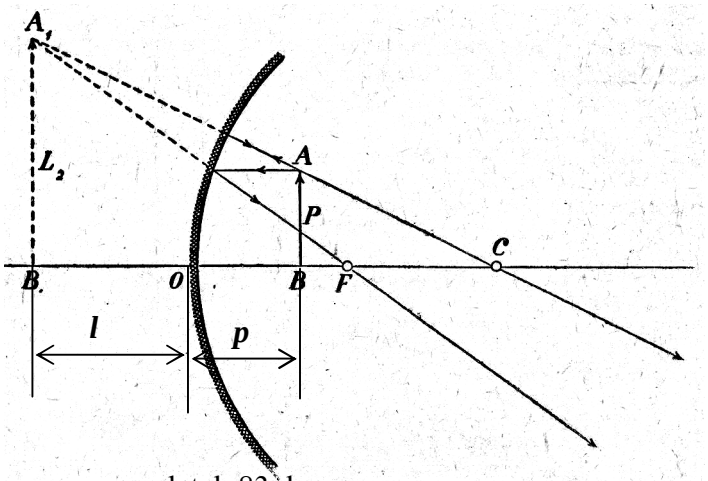


uz zadatak 83 b

d) Kada se predmet nalazi između žiže i temena ogledala lik će se nalaziti u preseku produžetaka zrakova, pa se kaže da je lik imaginaran (virtuelan, zamišljen, uobražen) i uvećan.
f = 20 cm; p = 5 cm; l = ?; L = ?
Sada se daljina lika uzima sa negativnim znakom:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l}\Rightarrow l=\frac{pf}{f-p}=\frac{5cm*20cm}{20cm-5cm}=\frac{20}{3}cm.$$

$$L=\frac{l}{p}P=\frac{\frac{20}{3}cm}{5cm}4cm\approx 5{,}3cm.$$



uz zadatak 83 d

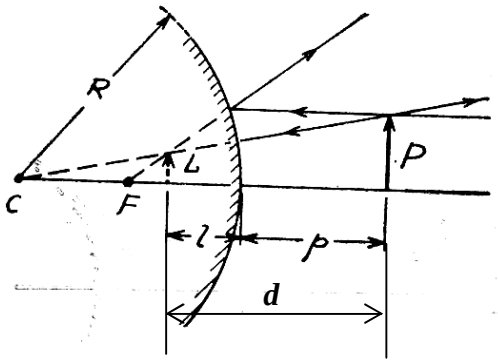
PRIMEDBA 1: Da smo uzeli jednačinu bez minusa, kao rezultat bi dobili negativnu daljinu lika što izađe na isto.
PRIMEDBA 2: Postoji još jedan slučaj! To je slučaj kada je predmet između žiže i centra krivine. Lik je realan izvrnut i uvećan – to je obrađeno u **zadatku 81**.

84. f = 24 cm; u = 1/3; d = ?

Jednačina ogledala u ovom slučaju je:

$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l}$ uvećanje je $u=\frac{l}{p}$ ili $p=3\,l$ Zamenom u jednačinu: $-\frac{1}{f}=\frac{1}{3l}-\frac{1}{l}\Rightarrow -\frac{1}{f}=-\frac{2}{3l}\Rightarrow l=\frac{2f}{3}=16cm.$

Onda je p = 48cm.
Sa slike je ***d = p + l = 64 cm.***



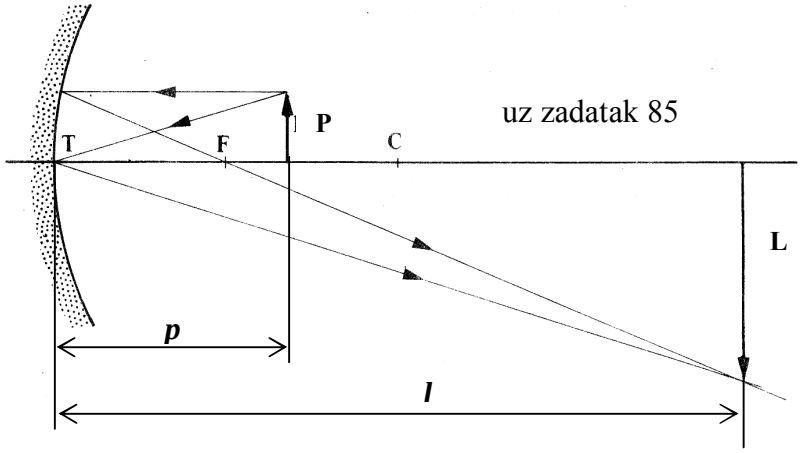
uz zadatak 84

85. u_1 =3; $p_2 = p_1 - 3$ cm; u_2 = 6; p_1 = ? f=?
Ako je lik realan i uvećan onda to odgovara priloženoj slici – za oba slučaja.

$u_1=\frac{l_1}{p_1}\Rightarrow l_1=3p_1$ Ovo treba uneti u jednačinu ogledala: $\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{4}{3p}$

U drugom slučaju:

$l_2=6p_2;\ \frac{1}{f}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{l_2}\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{7}{6p_2}$



uz zadatak 85

Ako izjednačimo desne strane; $\frac{4}{3p_1} = \frac{7}{6p_2} \Rightarrow 24p_2 = 21p_1 \Rightarrow 24(p_1 - 3) = 21p_1$

Odavde je $\mathbf{p_1 = 24\ cm}$**;** a iz jednačine ogledala **f = 18 cm.**

86. PO = 24 cm; OC = 16 cm; f = ?

Oba ogledala daju imaginarne likove. Pri poklapanju tih likova, prema slici, važi:

p = PO + OC = 24 cm + 16 cm = 40 cm.

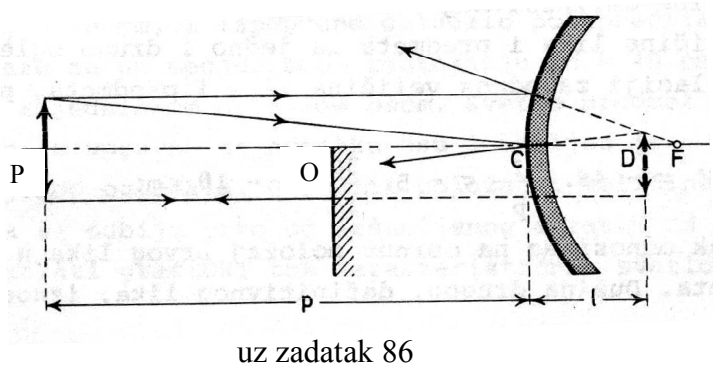
Prema osobinama ravnog ogledala važi

PO = OD = 24 cm.

Onda je l = OD – OC = 24 cm – 16cm = 8 cm.

Žižna daljina je

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow f = \frac{pl}{p-l} = 10\ cm.$$



uz zadatak 86

87. r = 28 cm (f = 14 cm); p = 34 cm; P = 2,8 cm; L = L'; P' = ?

Plan je sledeći: polazeći sa izdubljene strane naći visinu lika. Toliki je lik i sa ispupčene strane.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f} = \frac{34cm * 14cm}{34cm - 14cm} = 23{,}8\,cm.$$

Sada je lik:

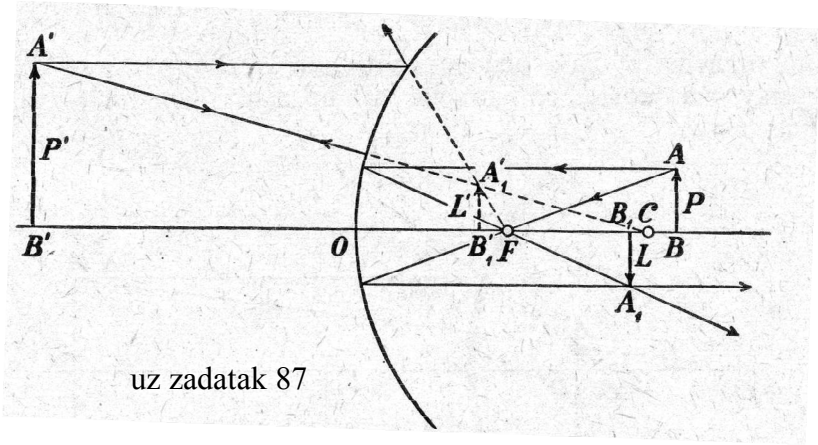
$$L = \frac{l}{p}P = \frac{23{,}8cm}{34cm}2{,}8cm = 1{,}96\,cm.$$

Sada naći daljinu lika sa ispupčene strane:

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l_{isp}} \Rightarrow$$

$$l_{isp} = \frac{pf}{p+f} = \frac{34cm * 14cm}{34cm + 14cm} = 9{,}9cm. \Rightarrow$$

$$P = \frac{p}{l_{isp}}L = \frac{34}{9{,}9}1{,}96\,cm \approx 6{,}73\,cm$$



uz zadatak 87

88. f = 30 cm; p = 30 cm; l_{kon} = ?

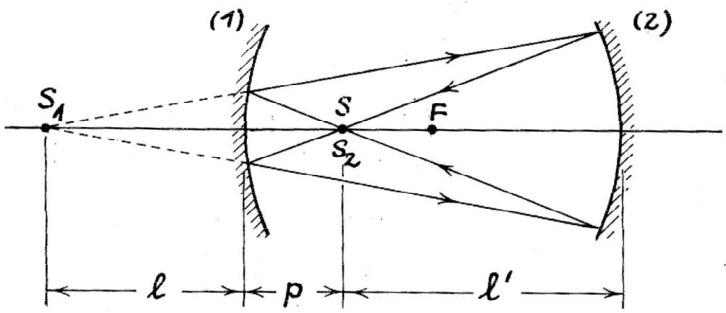
Izračunaćemo položaj prvog lika S_1 – lik je imaginaran;

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l} \Rightarrow \quad l = \frac{pf}{f-p} = \frac{20cm * 30cm}{30cm - 20cm} = 60cm.$$

Lik S_1 je predmet za desno ogledalo. Daljina tog predmeta je $p' = l + 2f$ = 120 cm.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{l'} \Rightarrow l' = \frac{p'f}{p'-f} = \frac{120cm * 30cm}{120cm - 30cm} = 40\,cm.$$

Ovo je udaljenost lika od desnog ogledala, Udaljenost od ogledala (1) je 20 cm. Znači konačni lik je na istom mestu kao i predmet.



uz zadatak 88

89. f = 5cm; d = 40 cm; p_1 = 7,5 cm; $d_{konačno}$ = ?

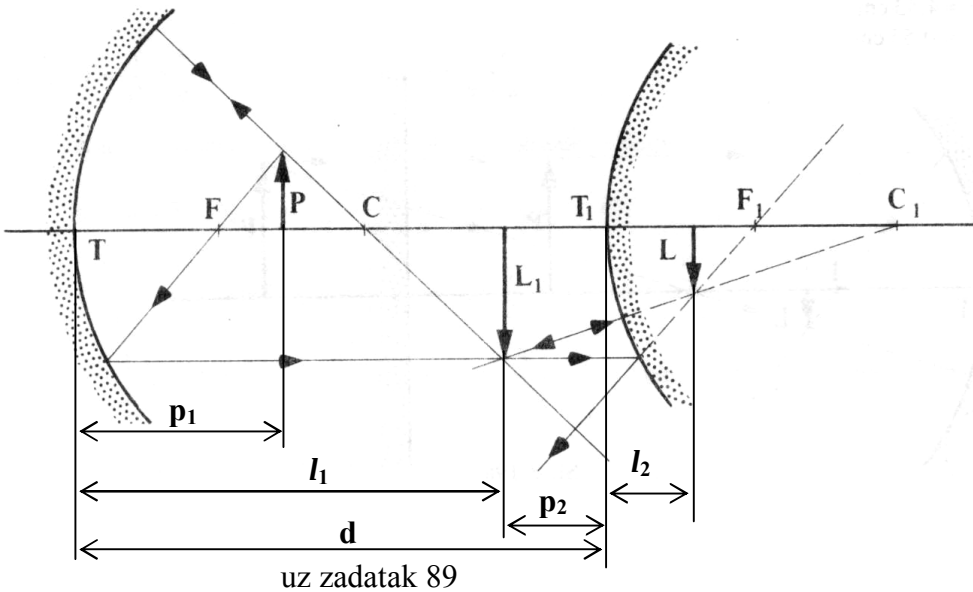
Prvo naći gde je lik od prvog, udubljenog ogledala: $\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1} \Rightarrow \quad l_1=\frac{p_1 f}{p_1-f}=\frac{7{,}5cm*5cm}{7{,}5cm-5cm}=15\,cm.$

Lik L_1 je predmet za ispupčeno ogledalo. Daljina tog predmeta je
$p_2 = d - l$ = 25 cm.
Konačni lik je imaginaran (i žiža):

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{l_2}$$

$$l_2=\frac{p_2 f}{p_2+f}=\frac{25cm*5cm}{25cm+5cm}=4{,}2\ cm.$$

Traženo rastojanje je $d_{kon} = d + l_2$
d_{kon} = 44,2 cm.

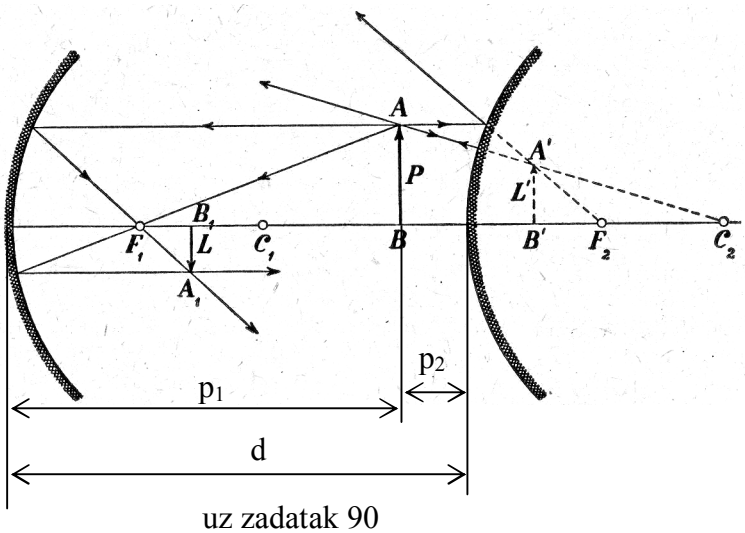


uz zadatak 89

90. Dato r tj. f, d; L = L'; naći p_1 = ?
Odmah se vidi da je:
d = p_1 + p_2
Sada treba naći još jednu vezu između p_1 i p_2. Za to ćemo iskoristiti drugi podatak u zadatku, da su visine likova iste. Znači naći L i L'. U tim izrazima treba sačuvati **p** a eliminisati ***l***, zbog prve jednačine.
Treba napomenuti da je slučaj sa konkavnim ogledalom jedino moguć, jer lik treba da je manji od predmeta, jer je tako u konveksnom ogledalu (uvek!)

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l} \Rightarrow l=\frac{p_1 f}{p_1-f}$$

$$L=\frac{l}{p_1}P=\frac{\frac{p_1 f}{p_1-f}}{p_1}P \Rightarrow L=\frac{f}{p_1-f}P$$



uz zadatak 90

Sličnu proceduru sprovešćemo i za konveksno ogledalo:

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{l_2} \quad l_2=\frac{p_2 f}{p+f} \quad \text{Lik L' je: } L'=\frac{l_2}{p_2}P=\frac{\frac{p_2 f}{p_2+f}}{p_2}P \Rightarrow L'=\frac{f}{p_2+f}P$$

Ako izjednačimo visine likova: L = L'

$$\frac{f}{p_1-f}P=\frac{f}{p_2+f}P \Rightarrow p_1-f=p_2+f \Rightarrow p_1-p_2=2f$$ Imamo dve relacije za p:

$$\begin{matrix} p_1+p_2=d \\ p_1-p_2=2f \end{matrix} \Rightarrow \quad p_1=\frac{d+2f}{2}$$

91. p = 30 cm; TA = 2 cm; BC = 20 cm; l = ?, u = ?
Zatrebaće AB = 10 cm.
Ovaj zadatak je bio Republičkom takmičenju. Ipak mi se čini da je ovde važniji matematički deo od fizičkog. Treba izračunati r zbog izračunavanja žiže i jednačine ogledala
$TC_1 = r$
$AC_1 = r - TA = r - 2$. Primenimo Pitagorinu teoremu:

$$r^2 = AC_1^2 + AB^2 \Rightarrow r^2 = (r-2)^2 + 10^2$$

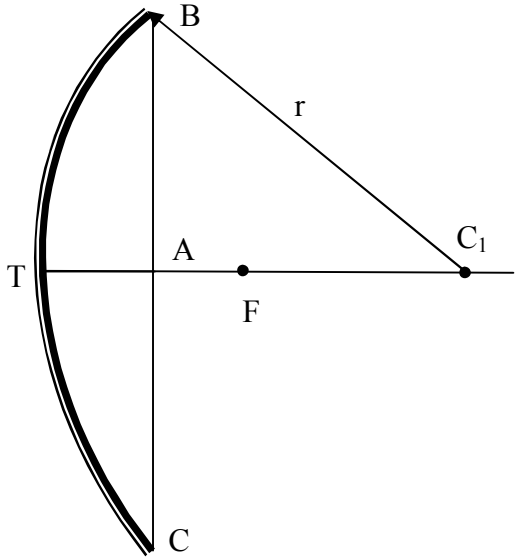
Dalje je

$$r^2 = r^2 - 4r + 4 + 100 \Rightarrow r = 26\,cm.$$

Onda je f = 13 cm.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f} = \frac{30cm * 13cm}{30cm - 13cm} \approx 23\ cm.$$

$$u = \frac{l}{p} = \frac{23}{30} \approx 0{,}77$$



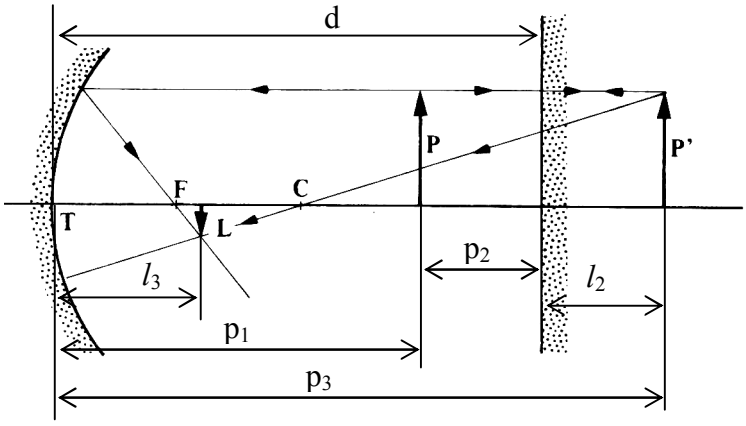
uz zadatak 91

92. r = 10 cm; (znači f = 5 cm) d = 20 cm; p_1 = 15 cm; P = 4 cm;
a) Prvo se formira lik na ravnom ogledalu P'. Predmet je udaljen od ravnog ogledala:
$p_2 = d - p_1$ =20 cm – 15 cm = 5 cm.
Znači da je P' udaljen od ogledala l_2 = 5 cm.
Lik P' predstavlja predmet za sferno ogledala, udaljen je $p_3 = d + l_2$ = 25 cm.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{l_3} \Rightarrow$$

$$l_3 = \frac{p_3 f}{p_3 - f} = \frac{25cm * 5cm}{25cm - 5cm} \approx 8{,}3\ cm.$$

$$L_3 = \frac{l_3}{p_3} P = \frac{8{,}3cm}{5cm} 4cm \approx 1{,}33\ cm$$

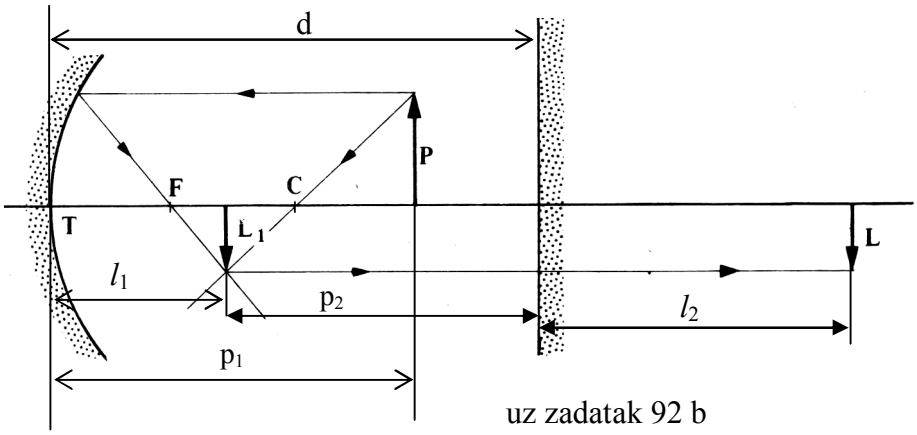


uz zadatak 92 a

b)
Sada se lik prvo formira na sfernom ogledalu:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{p_1 f}{p_1 - f} \Rightarrow$$

$$l_1 = \frac{15cm * 5cm}{15cm - 5cm} = 7{,}5cm$$



uz zadatak 92 b

Sada je L_1 predmet za ravno ogledalo. Njegova udaljenost je
$p_2 = d - l_1$ = 20cm – 7,5cm=12,5cm
Toliko je udaljen i konačan lik sa druge strane ogledala.
Znači l_2 = 12,5 cm.
Traženo rastojanje od temena sfernog ogledala je: $\mathbf{d_{uk} = d + l_2 = 32{,}5\ cm.}$
Veličina konačnog lika je ista kao L_1:

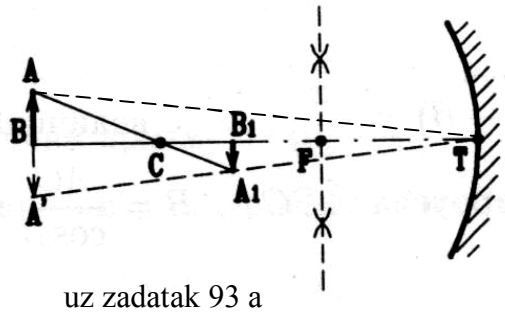
$$L_1 = \frac{l_1}{p_1} P = \frac{7{,}5\,cm}{15\,cm} 4cm = 2cm.$$

93. **a)** U prvom slučaju lik je realan – znači ogledalo je konkavno – i umanjen, znači predmet je dalje od centra krivine. Iz crteža (koje ste proučili) zaključuje se da **prava koja spaja vrhove predmeta i lika prolazi kroz centar krivine** (to je osobina jednog od karakterističnih zrakova). Drugi zrak, koji ćemo iskoristiti, **zrak koji pada na teme ogledala – odbija se pod istim uglom**. Zato ćemo konstruisati simetričan predmet u odnosu na glavnu optičku osu i nacrtati taj zrak. Tako dobijamo teme ogledala. Žiža se nalazi na sredini rastojanja centra krivine i temena.

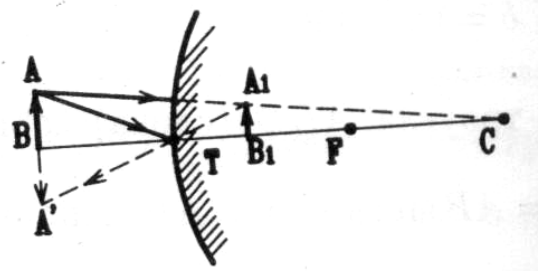
(svi imaginarni likovi su uspravni, nisu izvrnuti)

b) U drugom slučaju lik je istog smera kao i predmet (nije izvrnut), znači lik je imaginaran i umanjen, ogledalo je konveksno (ispupčeno)! To je ujedno i jedini slučaj za ispupčeno ogledalo!

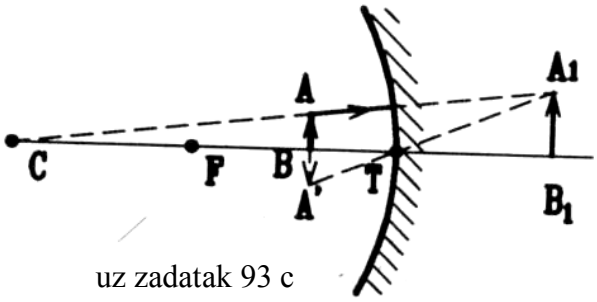
c) I ovde lik nije izvrnut –znači imaginaran je! – ali je veći od predmeta, znači ogledalo je konkavno a predmet se nalazi između žiže i temena.
Upotrebu karakterističnih zrakova proučiti sa slike.



uz zadatak 93 a



uz zadatak 93 b



uz zadatak 93 c

6. Prelamanje svetlosti

94. Iz svetlosnog izvora istovremeno se emituju dva svetlosna signala. Jedan prolazi kroz sloj vode debljine 3 km i indeksa prelamanja 1,33, a drugi kroz sloj vazduha iste debljine.
a) Koji signal će pre stići do posmatrača? (**Rez.:** kroz vazduh)
b) Odrediti vremenski razmak između prijema oba signala. (**Rez.:** $0,33*10^{-5}$ s)

95. Na glavnoj optičkoj sabirnog sočiva nalazi se svetao predmet u obliku strelice. Konstruisati likove i izračunati daljinu lika u sledećim slučajevima:
a) p = 2,25 f; b) p = 2f; c) p = 1,8 f; d) p = f; e) p = 0,8 f.
(**Rez.:** a) 1,8 f, b) 2f, c) 2,25 f, d) ∞, e) – 4f)

96. Predmet veličine P = 5 mm, nalazi se na udaljenosti 20 cm od rasipnog sočiva žižne daljine 10 cm. Odrediti veličinu i položaj lika. (**Rez.:** 1,7 mm; 6,7 mm)

97. Na udaljenosti 5 cm, od rasipnog sočiva, optičke moći 5 dioptrija nalazi se predmet. Gde se nalazi lik ovog predmeta? (**Rez.:** l = 4 cm)

98. Duž optičke ose sabirnog sočiva kreće se dve sekunde mali predmet prema sočivu od tačke koja je udaljena 36 cm od centra sočiva do tačke koja je udaljena 24 cm od sočiva. Žižna daljina sočiva je 12cm. odrediti brzinu kretanja lika. Kolika je relativna brzina predmeta u odnosu na lik. (**Rez.:** 3cm/s; 3 cm/s)

99. Izračunati prečnik Sunčevog lika dobijen pomoću sočiva jačine 0,4 m^{-1}. Prečnik Sunca iznosi $1,3*10^9$ m, a rastojanje od Sunca do zemlje je $1,5*10^{11}$ m. (**Rez.:** 0,022 m)

100. Daljina jasnog vida kod prosečnog čoveka je 25 cm. Kolika je dioptrija naočara potrebna da se koriguje vid čoveka koji jasno vidi predmete na minimalnom rastojanju od 50 cm (**Rez.:** + 2 m^{-1})

101. Kratkovid čovek može jesno da vidi predmet koji je na rastojanju 20 cm od oka. Kolika treba da je dioptrija njegovih naočara pa da jasno vidi udaljene predmete. (**Rez.:** - 5 m^{-1})

102. Od predmeta visine 8 mm dobije se pomoću sabirnog sočiva realna slika visine 24 mm. Kada se predmet približi sočivu za 20 mm, dobije se slika iste visine ali uspravna. Odrediti žižnu daljinu sočiva, optičku jačinu sočiva. Konstruisati odgovarajuće crteže. (**Rez.:** 30 mm; 33,3 m^{-1})

103. Rasipno sočivo daje lik na udaljenosti 16 cm od predmeta. Uvećanje sočiva je 1/3. Naći žižnu daljinu sočiva. Konstruisati odgovarajući crtež. (**Rez.:** 12 cm)

104. Rastojanje predmeta od realnog lika dobijenog sabirnim sočivom je 140 cm. Odredit žižnu daljinu sočiva, ako je njegovo uvećanje 3. Konstruisati odgovarajući crtež. (**Rez.:** 26,25 cm)

105. Udubljeno ogledalo poluprečnika krivine 10 cm i sabirno sočivo žižne daljine 7,5 cm postavljeni su na međusobnu udaljenost 20 cm, tako da im se ose poklapaju. Predmet je postavljen normalno na optičku osu na udaljenosti 7,5 cm od temena ogledala. Odrediti položaj konačnog lika koji nastaje kada svetlost sa predmata ide prvo na ogledalo pa na sočivo. Nacrtati sliku. (**Rez.:** 30 cm od sočiva)

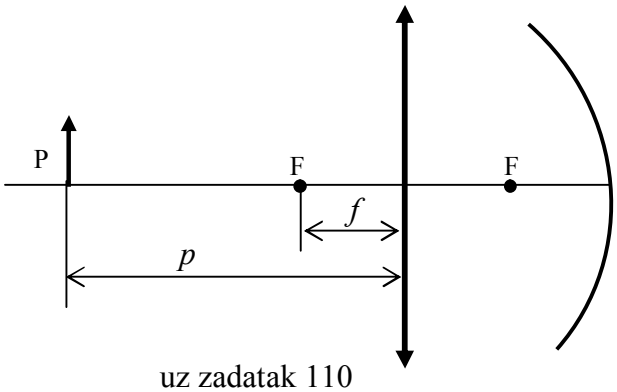
106. Sabirno sočivo daje na ekranu lik predmeta uvećan dva puta. Ako se sočivo pomeri za 36 cm prema ekranu, lik predmeta je dva puta manji. Odrediti žižnu daljinu i optičku jačinu sočiva.
(**Rez.:** 24 cm; 4,2 m^{-1})

107. Na rastojanju 20 cm ispred sabirnog sočiva žižne daljine 10 cm postavljen je lik visine 3 cm. Na drugoj strani ovog sočiva nalazi se još jedno sabirno sočivo žižne daljine 25 cm na daljini 50 cm. Optičke ose oba oba sočiva se poklapaju. Gde se nalazi konačni lik i kolika je njegova visina?
(**Rez.:** 150 cm od drugog sočiva (lik je realan); 15 cm)

108. Optički sistem se sastoji od dva sočiva, prvo je sabirno žižne daljine 0,8 m, a drugo rasipno žižne daljine 1,2 m. Optičke ose se poklapaju, a međusobno rastojanje sočiva jednako je zbiru njihovih žižnih daljina. Na rastojanju 1,4 m ispred sabirnog sočiva nalazi se svetao predmet. Gde se nalazi krajnj lik predmeta? Da li bi se od datog predmeta mogao da dobije isti lik upotrebom samo jednog sočiva?
(**Rez.:** 12 cm ispred drugog sočiva, ne)

109. Optički sistem se sastoji od dva sočiva od kojih je prvo rasipno žižne daljine 20 cm, a drugo sabirno žižne daljine 10 cm. Optičke ose sočiva se poklapaju, a međusobno rastojanje sočiva iznosi 5 cm. Na rastojanju 25 cm ispred rasipnog sočiva, postavljen je svetao predmet Gde se nalazi krajnji lik predmeta? Da li bi se od datog predmeta mogao da dobije isti lik, na istom mestu upotrebom samo jednog sočiva? (**Rez.:** 26,4 cm iza sabirnog sočiva, da)

110. Tanko sabirno sočivi nalazi se u centru krivine konkavnog (udubljenog) ogledala tako da im se optičke ose poklapaju. Žižne daljine ogledala i sočiva su jednake i iznose f. Uspravan svetao predmet veličine 2 cm nalazi se na optičkoj osi udaljen 3f od sočiva. Nacrtati konačan lik predmeta i odrediti veličinu lika.
(**Rez.:** $l_{kon} = 3f/2$; ispred sočiva. $L_{kon} = 1$ cm)



uz zadatak 110

111. Izvesti izraz za uvećanje lupe ako je oko prilagođeno na daljinu jasnog vida? Koliko je uvećanje sočiva, žižne daljine 10 mm, ako se koristi kao lupa? (**Rez.:** $u = \frac{s}{f} + 1$, (s = 25 cm); 26)

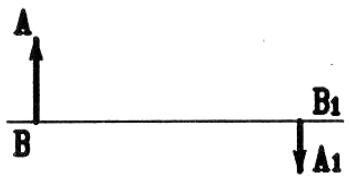
Po pravilniku, dozvoljeno je davati zadatke van redovnog školskog programa ali je potrebno kompletnu teoriju potrebnu za rešavanje izložiti u zadatku.
Za sistem od više priljubljenih sočiva može se izračunati njihova žižna daljina kada se oni posmatraju kao jedno sočivo. Takva žižna daljina se zove ekvivalentna. Formula je sledeća:
$\frac{1}{f_{ekv}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \ldots$ Ili preko optičkih jačina: $\boldsymbol{\omega_{ekv} = \omega_1 + \omega_2 + \ldots}$

112. Sabirno sočivo optičke jačine 2,5 dioptrije spojeno je sa rasipnim sočivom jačine – 2 dioptrije. Naći daljinu lika ako je odaljenost predmeta 0,4 m. (**Rez.:** 50 cm)

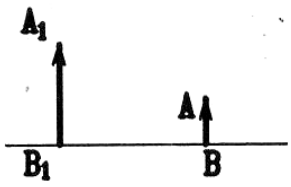
113. Ako se ispred sabirnog sočiva postavi predmet na rastojanju 50 cm, dobije se realan lik na rastojanju 40 cm. Ako se pored sabirnog sočiva stavi još jedno dobije se lik na udaljenosti 120 cm. Kolika je optička moć drugog sočiva i koje je vrste? (**Rez.:** - 1,7 m^{-1}; rasipno)

114. Lupa ima optičku moć 20 dioptrija. Koliko je uvećanje lupe ako se ona nalazi na 5 cm od oka.
(**Rez.:** uvećanje je 5)

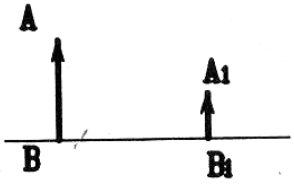
115. Pomoću sočiva dobijeni su likovi A_1B_1 predmeta AB, kao na slici. Konstrukcijom odrediti vrstu sočiva, položaj sočiva i njegove žiže. (Podsetite se karakterističnih zrakova kod sočiva)



uz zadatak 115 a



uz zadatak 115 b



uz zadatak 115 c

Evo sada jednog zadatka sa državnog takmičenja 2014. Pokazuje se da je korisno znati karakteristične zrake.

116. Tačkasti svetlosni izvor nalazi se na glavnoj optičkoj osi, na rastojanju p = 60 cm od rasipnog sočiva žižne daljine f = - 15 cm. Sočivo se pomeri u pravcu normalnom na glavnu optičku osu, tako da se centar sočiva nalazi na rastojanju x = 2 cm u odnosu na prvobitni položaj. Kako treba pomeriti tačkasti svetlosni izvor da bi se njegov lik nalazio na istom mestu? (**Rez.:** normalno na GOO za 8 cm)

6. Prelamanje svetlosti – rešenja

94. d = 3 km = $3*10^3$ km; n_v = 1,33; t = ?

Brzina svetlosti u vakuumu je najveća brzina u prirodi. Iznosi c = $3*10^8$ m/s. U svakoj drugoj sredini brzina svetlosti je manja.

Brzinu svetlosti u vodi izračunaćemo iz indeksa prelamanja:

$$n = \frac{c}{c_{voda}} \Rightarrow c_{voda} = \frac{c}{n} \Rightarrow c_v = \frac{3*10^8\ m/s}{1{,}33} = 2{,}25*10^8\ \frac{m}{s}.$$

Znači vreme prostiranja signala u vodi iznosi: $t_1 = \frac{d}{c_v} \Rightarrow t_1 = \frac{3*10^3 m}{2{,}25*10^8\ m/s} = 1{,}33*10^{-5}\ s.$

Za vazduh je indeks prelamanja približan jedinici, što znači da je brzina svetlosti u vazduhu približan brzini u vakuumu tj. $c_{vazduh} \approx c$.

$$t_2 = \frac{d}{c} \Rightarrow t_2 = \frac{3*10^3 m}{3*10^8\ m/s} = 1*10^{-5} s.$$

Znači signal kroz vazduh će pre stići do posmatrača, i to za $\Delta t = t_1 - t_2 = 0{,}33*10^{-5}$ s.

95.

a) p = 2,25 f; *l* = ?

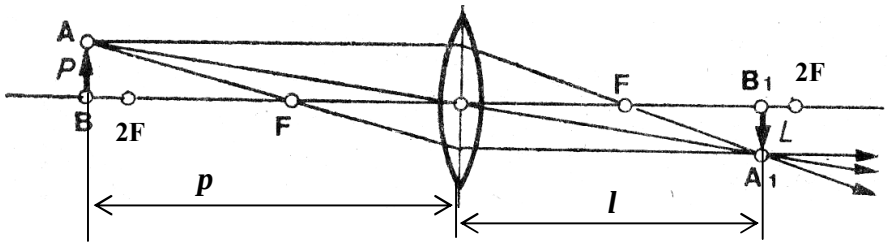
Crtež se ostvaruje upotrebom karakterističnih zrakova.

Jednačina sočiva glasi:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f}$$

$$\Rightarrow l = \frac{2{,}25f * f}{2{,}25f - f} = 1{,}8f$$

$$u = \frac{l}{p} = \frac{1{,}8f}{2{,}25f} = 0{,}8$$



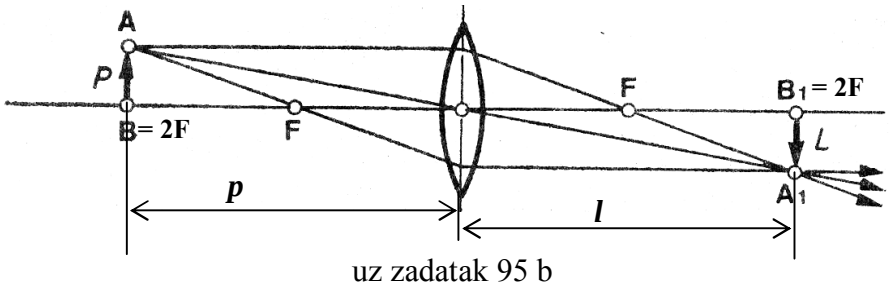
uz zadatak 95 a

b) p = 2 f; *l* = ?

Opet jednačina sočiva:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f}$$

$$\Rightarrow l = \frac{2f * f}{2f - f} = 2f \Rightarrow \mathbf{u = 1}$$



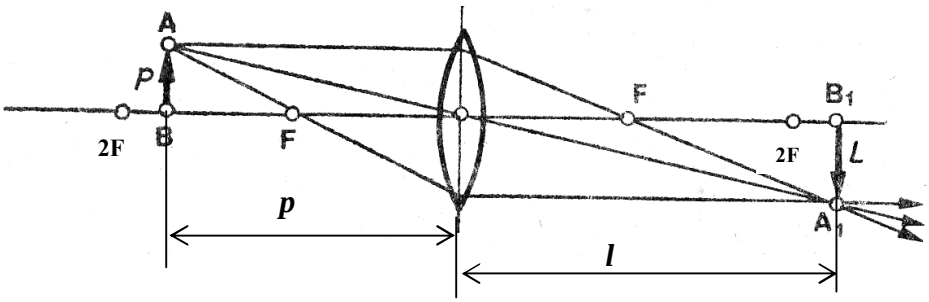
uz zadatak 95 b

c) p = 1,8 f; *l* = ?

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f}$$

$$\Rightarrow l = \frac{1{,}8f * f}{1{,}8f - f} = 2{,}25f$$

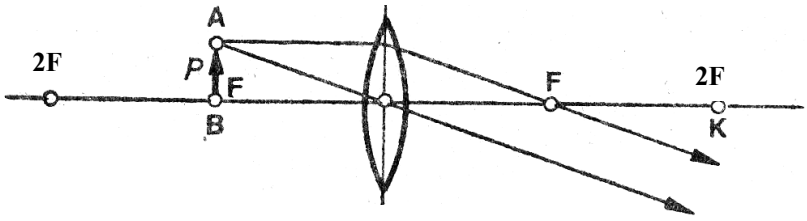
$$u = \frac{2{,}25f}{1{,}8f} = 1{,}25$$



uz zadatak 95 c

d) p = f; *l* = ?

Ako je predmet u žiži lik se nalazi u beskonačnosti.



uz zadatak 95 d

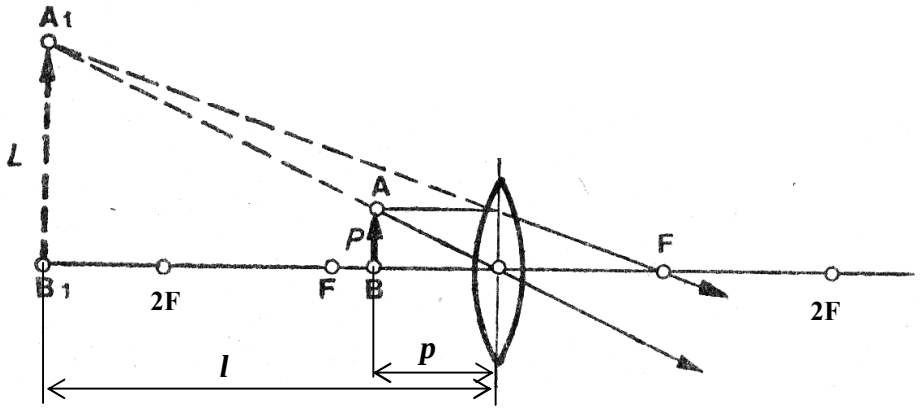
e) p = 0,8 f; l = ?

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{l}\Rightarrow l=\frac{pf}{p-f}$$

$$\Rightarrow l=\frac{0{,}8f*f}{0{,}8\text{f-f}}=-4f$$ **⇒u = 4**

Ako je predmet između žiže i centra sočiva, lik je imaginaran, uspravan i uvećan. Zato smo dobili znak minus ispred daljine predmeta.
To se može predvideti pa se upotrebljava oblik jednačine:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l}$$



uz zadatak 95 e

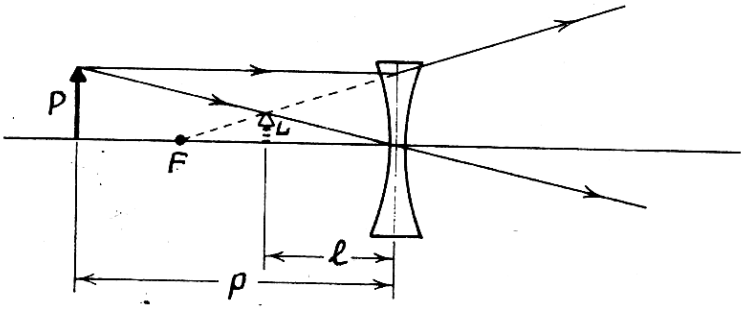
96. P = 5 mm; p = 20 cm; f = 10 cm; l = ?; L = ?

Kod rasipnog sočiva **imaginarni su i žiža i lik** jer se nalaze u preseku produžetaka zrakova. Zato ih uzimamo sa znakom minus.

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l}\Rightarrow l=\frac{pf}{p+f}$$ dalje je

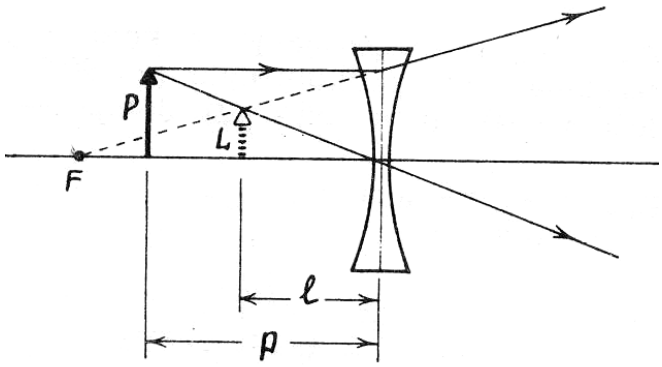
$$l=\frac{20cm*10cm}{20cm+10cm}=6{,}7cm.$$ Uvećanje je ;

$$u=\frac{L}{P},ili\quad u=\frac{l}{p}\Rightarrow L=\frac{l}{p}P=\frac{6{,}7cm}{20cm}5mm\approx 1{,}7\ mm.$$



uz zadatak 96

Kod rasipnog sočiva odnos predmeta i lika je uvek ovakav, bez obzira na položaj predmeta.
Evo pogledajte sledeći primer:



uz zadatak 97

97. p = 5 cm; ω = 5 m^{-1}; l = ?

Optička moć sočiva (optička jačina) se definiše:

$$\omega=\frac{1}{f}\left[m^{-1}\right]$$ Treba napomenuti da se optička jačina obeležava i kao: $D=\frac{1}{f}$

Znači $f=\frac{1}{\omega}\Rightarrow f=\frac{1}{5m^{-1}}=0{,}2\ m=20\ cm.$ Jednačina sočiva je ista kao i u prethodnom zadatku:

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l}\Rightarrow l=\frac{pf}{p+f}\qquad l=\frac{5cm*20cm}{5cm+20cm}=4cm.$$

98. p_1 = 36 cm; p_2 = 24 cm; f = 12 cm; t = 2s; v_{lika} =? v_{rel} =?

U oba slučaja lik je realan. Treba naći za koliko se pomeri lik:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}\Rightarrow l_1=\frac{p_1f}{p_1-f}=\frac{36cm*12cm}{36cm-12m}=18cm.$$

Lik se pomerio za 24cm – 18 cm = 6 cm. (Lik se udaljuje od sočiva!)

$$v_{lika}=\frac{6cm}{2s}=3\frac{cm}{s}$$, brzina predmeta:

$$v_{pred}=\frac{36cm-24cm}{2s}=6\frac{cm}{s}$$

v_{rel} = v_{pred} - v_{lik} = 3 cm/s – kao da lik miruje a predmet mu se približava brzinom 3 m/s.

99. $\omega = 0{,}4\ m^{-1}$; $D_{sun} = 1{,}3*10^9$ m; $r_{zs} = 1{,}5*10^{11}$ m; L = ?

Žižna daljina sočiva je $f = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{0{,}4m^{-1}} \Rightarrow f = 2{,}5\ m.$

Daljina Zemlja – Sunce predstavlja daljinu predmeta, pa se odmah može izračunati daljina lika:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{p-f} \Rightarrow l = \frac{1{,}5*10^{11}m*2{,}5m}{1{,}5*10^{11}m - 2{,}5m} \approx 2\ m.$$

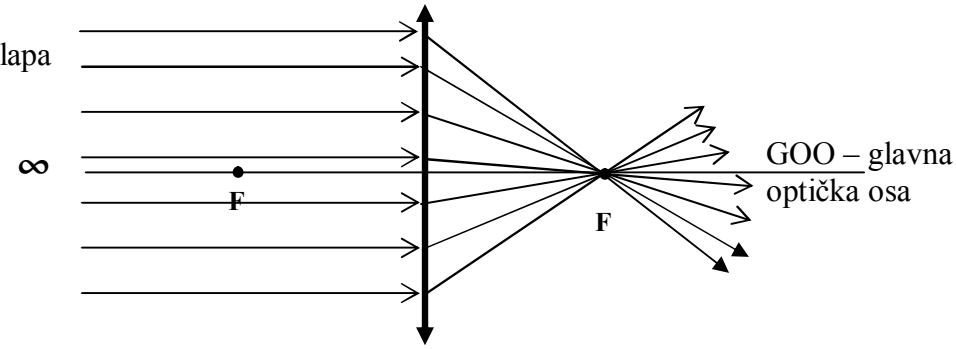
(Onih 2,5 m u imeniocu je stvarno zanemarljivo)

Lik se znači nalazi u žiži. To se uklapa u ono što znamo o žiži, zraci koji dolaze iz beskonačnosti **(∞)** seku se u žiži.
Veličinu lika dobijamo iz definicije uvećanja sočiva:

$$u = \frac{L}{P};\ u = \frac{l}{p} \Rightarrow \frac{L}{P} = \frac{l}{p}$$

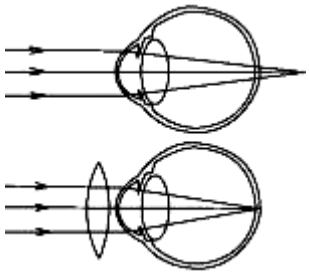
$$L = \frac{l}{p}P = \frac{2{,}5m}{1{,}5*10^{11}m}1{,}3*10^9\ m \Rightarrow$$

$$L = 2{,}2*10^{-2}\ m.$$



uz zadatak 99

100. d = 25 cm; a = 50 cm; f = ?.



uz zadatak 100

Dalekovidost nastaje kada oko ne može dovoljno da se prilagodi, pa se svetlosni zraci seku iza mrežnjače. Za popravku ovog nedostatka koristi se sabirno sočivo koje dodatno sakuplja zrake.
U ovom primeru sočivo treba da predmet koji čovek drži na daljini 25 cm **(p = 25 cm)** „premesti“ na daljinu 50 cm ***(l =50 cm)***

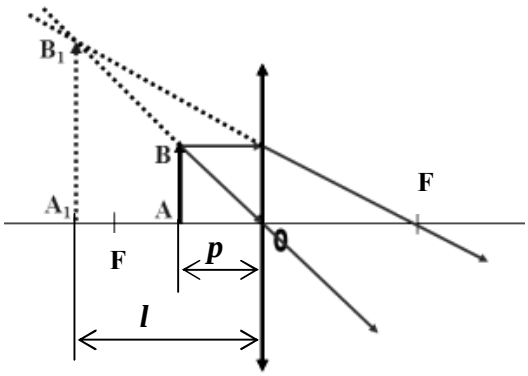
. Lik mora biti imaginaran da bi ostao uspravan.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l} \Rightarrow f = \frac{pl}{l-p}$$

$$f = \frac{50cm*25cm}{50cm - 25cm} = 50cm = 0{,}5\,m$$

$$\omega = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}5m} \Rightarrow \omega = 2\,m^{-1}.$$

Ako je sočivo sabirno kaže se da je dioptrija pozitivna, znači + 2 dioptrije



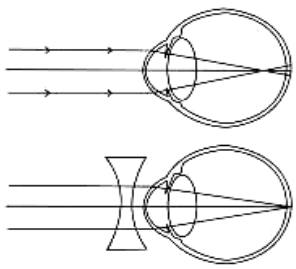
uz zadatak 100

101. Kratkovidost se popravlja rasipnim sočivom.
Za ovaj primer potrebno je predmet iz beskonačnosti p = ∞ (to znači udaljeni predmeti) postaviti na daljinu *l* = 20 cm. Lik kod rasipnog sočiva je uvek imaginaran, znači uspravan.

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}$$ Obratiti pažnju da je $\frac{1}{p} = \frac{1}{\infty} = 0$, pa preostaje

$$-\frac{1}{f} = -\frac{1}{l} \Rightarrow f = l = 20cm.\quad \omega = \frac{1}{f} = 5m^{-1}.$$

Dioptrija kod rasipnog sočiva je negativna znači – 5 dioptrija.



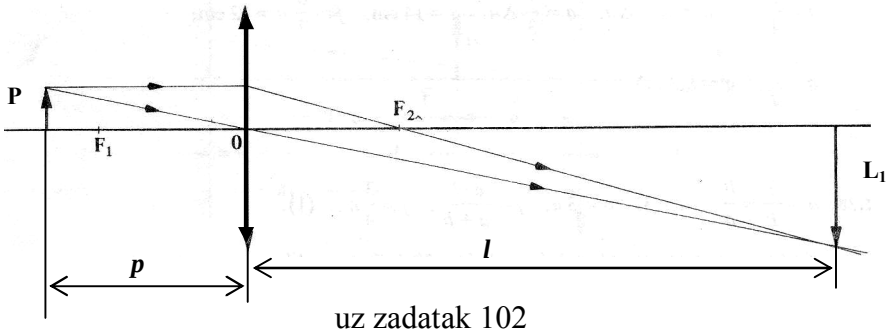
uz zadatak 101

Predlog: Lek za privrednu krizu je štampati novčanice sa položenom osmicom!

pogledajte kraj ovog poglavlja!

102. P = 8 mm; L_1 =24 mm; Δp = 20 mm; L_2 = 24 mm; f = ? ω = ?

U prvom slučaju lik je realan i uvećan, znači predmet se nalazi između žiže i dvostruke žižne daljine (vidi 95 zad)
U drugom slučaju lik je imaginaran jer je uspravan.
Veličina lika je ista u oba slučaja, znači uvećenja sočiva su ista u oba slučaja i iznose **u = 3** ali jednačine nisu.



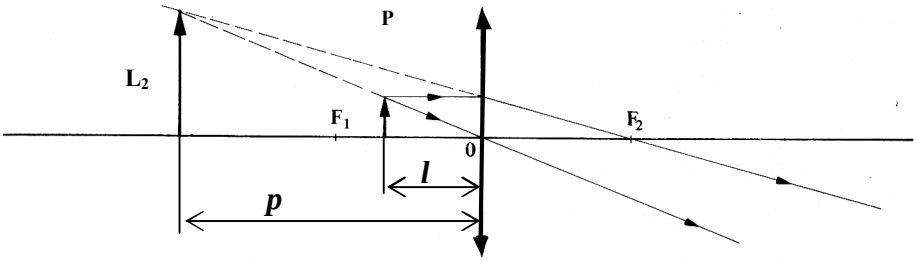
uz zadatak 102

U prvom slučaju: $\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}$

u = 3 znači $l_1 = 3\,p_1$ Pa je

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{3p_1}\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{4}{3p_1}\Rightarrow$$

$$f=\frac{3p_1}{4}$$



uz zadatak 102

U drugom slučaju isto važi $l_2 = 3p_2$ ali i $p_2 = p_1 - 20$ mm.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{l_2}\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{3p_2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{f}=\frac{2}{3p_2}\Rightarrow f=\frac{3p_2}{2}$$

Ako izjednačimo izraze za žižnu daljinu dobijamo: $2p_2 = p_1 \Rightarrow 2(p_1 - 20) = p_1$ odavde je $\mathbf{p_1 = 40}$ **mm.**
Zamenom se dobija **f = 30 mm.**

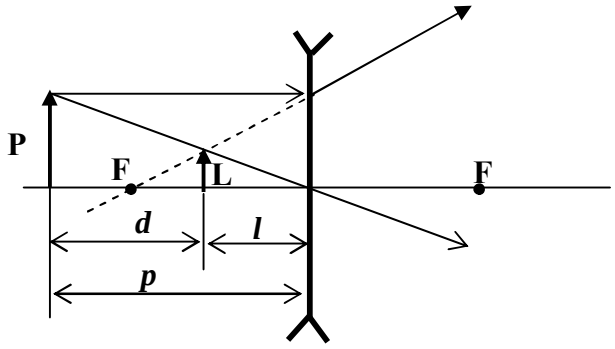
Optička jačina je : $\omega=\frac{1}{f}=\frac{1}{0{,}03m^{-1}}=33{,}3\,dioptrije.$

103. d = 16 cm; $u=\frac{1}{3}$; f = ?

Rastojanje predmeta i lika je d = p – l

Uvećanje je $u=\frac{l}{p}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{l}{p}\Rightarrow p=3l$

zamenom dobijamo d = 3*l* – *l* ⇒ ***l* = 8cm**. **p = 24 cm.**



uz zadatak 103

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l}\Rightarrow-\frac{1}{f}=\frac{1}{3l}-\frac{1}{l}\Rightarrow-\frac{1}{f}=\frac{-2}{3l}$$

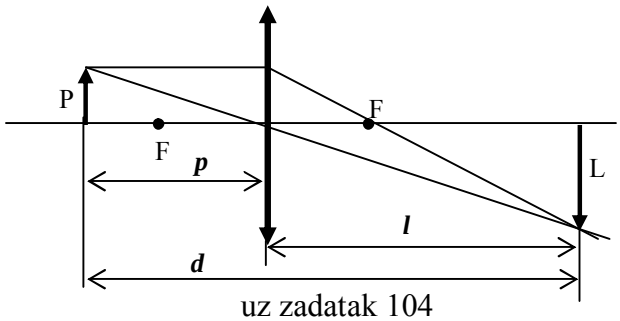
odavde je $f=\frac{3l}{2}=12cm.$

104. d = 140 cm; u = 3; f = ?

Sa slike se vidi da je $d = p + l$ $\quad u=\frac{l}{p}$

Ako je uvećenje 3 onda je $l = 3\,p$
$d = 4p \Rightarrow$ 140 = 4*p* ⇒ ***p* =35 cm** ⇒ ***l* = 105 cm**.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{l}\Rightarrow f=\frac{pl}{p+l}=\frac{105cm*35cm}{140cm}=26{,}25cm.$$



uz zadatak 104

105. r =10cm; (znači f_1 = 5 cm); f_2 = 7,5 cm; d = 20 cm; p_1 = 7,5 cm; $l_{konačno}$ = ?

Lik od ogledala (L_1) se nalazi na rastojanju:

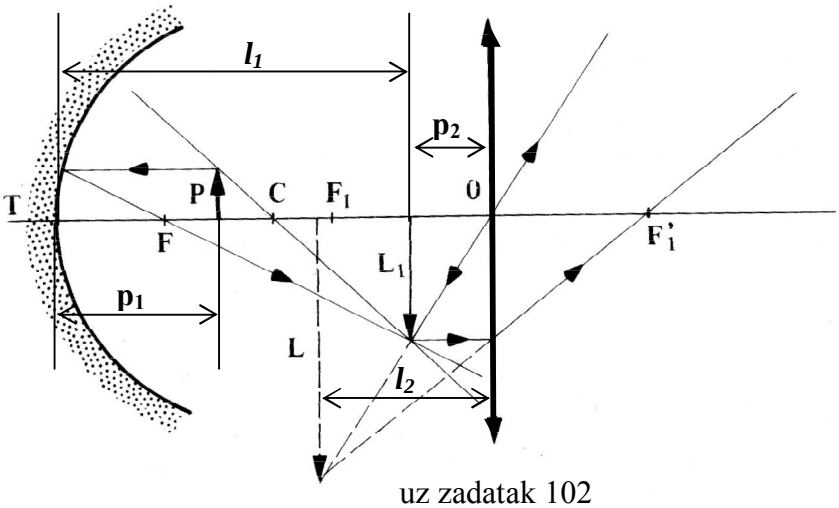
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1} \Rightarrow$$

$$l_1=\frac{pf}{p-f}=\frac{7{,}5cm*5cm}{7{,}5cm-5cm}=14cm.$$

Ovaj lik L_1 je predmet za sočivo. Njegova daljina je

$p_2 = d - l_1$ = 20 cm – 14 cm = 6 cm.

Vidimo da je ovaj predmet između žiže sočiva i njegovog centra. Znači



uz zadatak 102

konačni lik L će biti imaginaran i udaljen od sočiva za: $\frac{1}{f_2}=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{l_2} \Rightarrow l_2=\frac{p_2 f_2}{f_2-p_2}=30cm.$

106. u_1 = 2; x = 36 cm; $u_2 = \frac{1}{2}$; f = ?; ω = ?

Prvo iskoristimo uvećanja.

Iz definicije uvećanja nalazimo veze:

$$u_1=\frac{l_1}{p_1} \Rightarrow 2=\frac{l_1}{p_1} \Rightarrow l_1=2p_1$$

$$u_2=\frac{l_2}{p_2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{l_2}{p_2} \Rightarrow 2l_2=p_2$$

Sa slike se vidi da je:

$p_2 = p_1 + x$

$l_2 = l_1 - x$

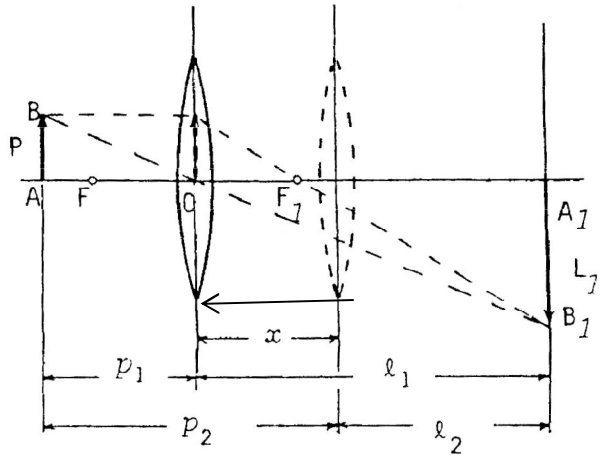
Zamenom u drugu vezu ($2l_2 = p_2$) dobijamo:

$2(l_1 - x) = p_1 + x$

Sada zamenimo $\boldsymbol{l_1 = 2p_1}$ ⇒ $2(2p_1 - x) = p_1 + x$

Odavde je $\mathbf{p_1 = 36\ cm;\ l_1 = 72\ cm;}$ Žižna daljina je :

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_2} \Rightarrow f=\frac{p_1 l_1}{p_1+l_1}=\frac{36cm*72cm}{108cm}=24cm.$$



uz zadatak 103

optička moć:

$$\omega=\frac{1}{f}=\frac{1}{0{,}24m}=4{,}2\ m^{-1}$$

107. p_1 = 20 cm; f_1 = 10 cm; P = 3 cm; f_2 = 25 cm; d = 50 cm, $l_{konačno}$ = ?; $L_{konačno}$ = ?

Plan je sledeći: Lik A_1B_1 koji daje prvo sočivo predstavlja predmet za drugo sočivo. Konačni lik je A_2B_2.

Jednačina za prvo sočivo je;

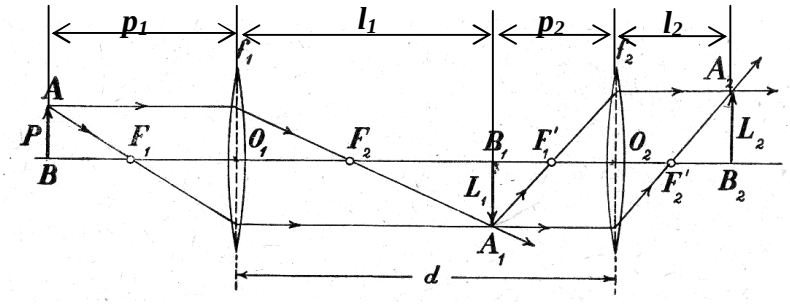
$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}$$

$$l_1=\frac{p_1 f_1}{p_1-f_1}=\frac{20cm*10cm}{20cm-10cm}=20cm.$$

Onda je $p_2 = d - l_1$ $\mathbf{p_2 = 30\ cm}$.

Drugo sočivo daje:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{l_2} \Rightarrow l_2=\frac{p_2 f_2}{p_2-f_2}=\frac{30cm*25cm}{30cm-25cm}=150cm.$$



uz zadatak 104

Krajnji lik : $\frac{L_1}{P}=\frac{l_1}{p_1}$ *i* $\frac{L_2}{L_1}=\frac{l_2}{p_2} \Rightarrow$

$$L_2=\frac{l_1 l_2}{p_1 p_2}P=15cm.$$

108. $f_1 = 0{,}8$ m; $f_2 = 1{,}2$ m; d = 2 m; $p_1 = 1{,}4$ m; $l_2 = ?$

Treba zapaziti da iz podatka da je $d = f_1 + f_2$ sledi i podatak da se žiže sočiva poklapaju! Ako su žiže prvog sočiva F_1 i F_1', a drugog F_2 i F_2', onda je $F_1' = F_2$.

Naći ćemo gde se nalazi lik od prvog sočiva:

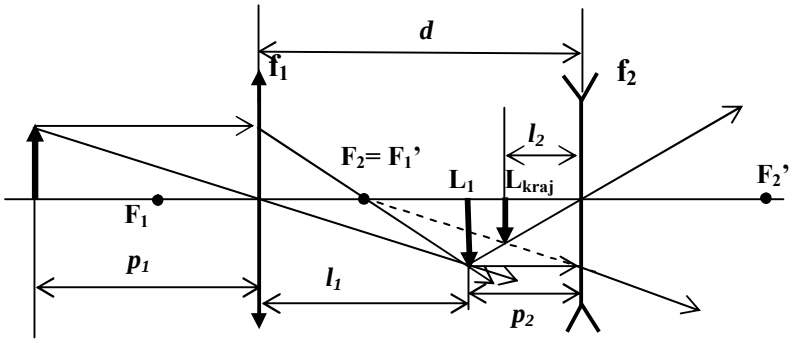
$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1}$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{1{,}4m * 0{,}8m}{1{,}4m - 0{,}8m} = \frac{5{,}6}{3} = \frac{28}{15}m$$

Taj lik $\mathbf{L_1}$ je predmet za drugo sočivo.

$p_2 = d - l_1 = 2 - 28/15 =$ **2/15 m**.

Krajnji lik $\mathbf{L_{kraj}}$ je imaginaran (a i žiža):



uz zadatak 108

$$-\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 + f_2}$$

$$l_2 = \frac{\frac{2}{15}m * 1{,}2m}{\frac{2}{15}m + 1{,}2m} = 0{,}12\,m.$$

Ovakav lik se ne može dobiti jednim sočivom, jer je konačni lik **imaginaran i obrnut** u odnosu na predmet što se ne može dobiti nikakvim sočivom! (Svi imaginarni likovi su uspravni!)

109. $f_1 = 20$ cm (rasipno); $f_2 = 10$ cm (sabirno); d = 5 cm; $p_1 = 25$ cm; $l_{krajnje} = ?$

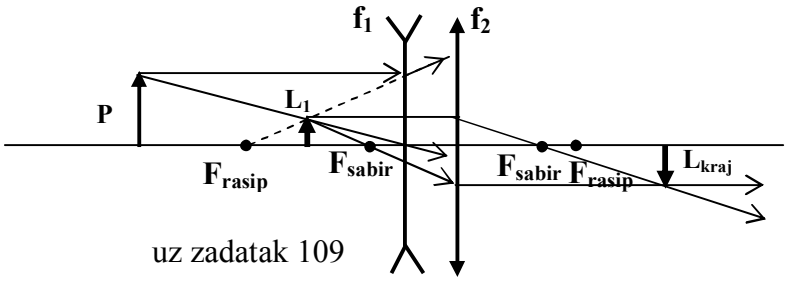
Priča je slična kao u predhodna dva zadatka.

Prvi lik L_1 je imaginaran i predstavlja predmet za sabirno sočivo. Krajnji lik je realan i nalazi se na rastojanju

$\boldsymbol{l_{krajnje}}$ **= 26,4 cm** iza sabirnog sočiva.

(ovo dokažite uz pomoć jednačine sočiva)

Ovakvu sliku je moguće dobiti pomoću jednog sočiva i to sabirnog.



uz zadatak 109

110. $p_1 = 3f$; P = 2 cm; $l_{kon} = ?$; $L_{kon} = ?$

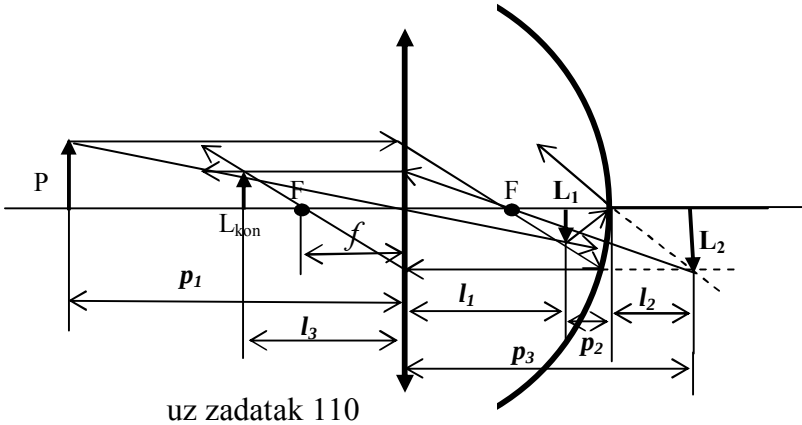
Lik predmeta od sočiva nalazi se na udaljenju:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = \frac{3f * f}{3f - f} = \frac{3}{2}f$$

Lik L_1 je predmet za ogledalo. Nalazi se na udaljenju $p_2 = f - \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}f$

Lik u ogledalu će biti imaginaran:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{p_2 f}{p_2 - f} = f$$



uz zadatak 110

Sad je L_2 predmet za sočivo (i taj lik se formira jer se zraci odbijaju od ogledala i vraćaju kroz sočivo i formiraju konačni lik $L_{konačno}$. Daljina tog predmeta je $p_3 = f + 2f = 3f$.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{l_3} \Rightarrow l_3 = \frac{p_3 f}{p_3 - f} = \frac{3}{2}f$$

Veličine likova: $L_1 = \frac{l_1}{p_1}P = \frac{\frac{3}{2}f}{3f}2cm = 1cm$

$$L_2 = \frac{l_2}{p_2}L_1 = \frac{f}{f/2}1cm = 2cm. \qquad L_{kon} = \frac{l_3}{p_3}L_2 = \frac{3f/2}{3f}2cm = 1cm.$$

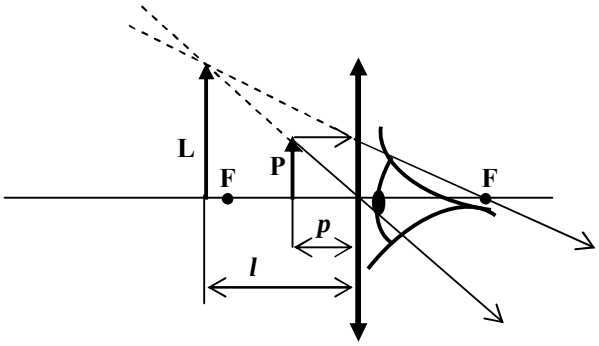
111. Lupa je svako sabirno sočivo kod koga se predmet stavi između žiže i centra sočiva.
Uvećanje sočiva se definiše kao:

$$u = \frac{l}{p}$$

Jednačinu sočiva možemo transformisati na sledeći način:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l} \quad \text{pomnožimo sa } l$$

$$\frac{l}{f} = \frac{l}{p} - 1 \quad \Rightarrow \frac{l}{f} = u - 1 \quad \Rightarrow u = \frac{l}{f} + 1$$



uz zadatak 111

Podrazumeva se da je oko neposredno uz sočivo.
Tada je $l = s$, gde je s daljina jasnog vida (oko 25 cm).

Konačno je $u = \frac{s}{f} + 1$ Ako je f = 10 mm = 1 cm; dobijamo $u = \frac{25cm}{1cm} + 1 = 26$.

112. $\omega_1 = 2{,}5$ diop; $\omega_2 = -2$ diop, p = 40 cm, l = ?
$\omega_{ekv} = \omega_1 + \omega_2 = 2{,}5 - 2 \Rightarrow$ **ω_{ekv} = 0,5 diop**
To znači da je ekvivalentno sočivo sabirno, žižna daljina je:

$f = \frac{1}{\omega_{ekv}} = \frac{1}{0{,}5m^{-1}} = 2m.$ Predmet se nalazi između žiže i sočiva pa će lik biti imaginaran. Može se upotrebiti slika iz prethodnog zadatka

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{pf}{f-p} = \frac{40cm * 200cm}{200cm - 40cm} = 50\ cm.$$

113. $p_1 = 50$ cm; $l_1 = 40$ cm; $p_2 = p_1$ (predmet se ne pomera) $l_2 = 120$ cm; ω_2 = ?
Iz podataka se vidi da možemo izračunati žižnu daljinu sabirnog sočiva kao i žižnu daljinu sistema sočiva. Sistem se ponaša kao sabirno sočivo jer je lik realan.

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} \Rightarrow f_1 = \frac{p_1 l_1}{p_1 + l_1} = \frac{50cm * 40cm}{50cm + 40cm} = 22{,}22cm. \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}22m} = 4{,}5m^{-1}$$

$$\frac{1}{f_{ekv}} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} \Rightarrow f_{ekv} = \frac{p_2 l_2}{p_2 + l_2} = \frac{50cm * 120cm}{50cm + 120cm} = 35{,}3cm. \ \omega_{ekv} = \frac{1}{f_{ekv}} = \frac{1}{0{,}353m} = 2{,}8m^{-1}$$

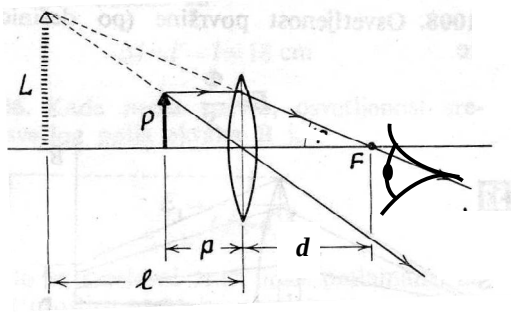
$\omega_{ekv} = \omega_1 + \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_{ekv} - \omega_1 \Rightarrow$ **ω_2 = 2,8 m^{-1} – 4,5 m^{-1} = - 1,7 m^{-1}.**
Drugo sočivo je rasipno.

114. $\omega = 20$ m^{-1}; d = 5 cm; u = ?

Žižna daljina lupe je $f = \frac{1}{\omega} = 5cm.$

Uvećanje lupe se definiše kao $u = \frac{l}{p} + 1$ Lik treba da je udaljen od oka za daljinu jasnog vida s. Sada oko nije uz sočivo pa se sa slike vidi da je $l = s - d$ tj l = 25 cm – 5 cm = 20 cm.

$$u = \frac{20cm}{5cm} + 1 = 5.$$

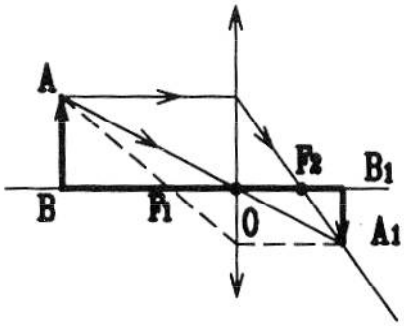


115. Prethodno treba proučiti karakteristične zrake kod sočiva. Pogledajte zadatke **95** i **96**.

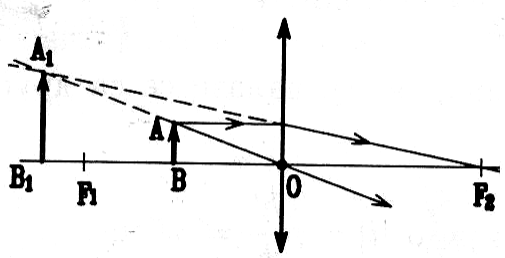
a) Lik je realan, jer je obrnut, znači u pitanju je sabirno sočivo. Zrak koji spaja vrhove predmeta i lika prolazi kroz centar sočiva. Kad je pronađeno mesto sočiva, konstruišemo zrak paralelalan sa glavnom optičkom osom, on prolazi kroz žižu. Druga žiža se nalazi sa druge strane sočiva, na istom rastojanju.

b) Lik je imaginaran jer je uspravan i veći od predmeta, znači opet je u pitanju sabirno sočivo. Opet povučemo zrak koji prolazi kroz vrhove predmeta i lika. Taj zrak prolazi kroz centar sočiva. Sad opet povučemo zrak iz vrha predmeta paralelno sa glavnom optičkom osom, taj zrak prolazi kroz žižu. Druga žiža je sa druge strane sočiva.

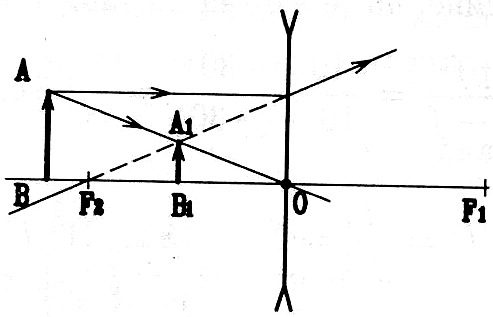
c) Lik je uspravan, znači imaginaran, ali manji od predmeta, u pitanju je rasipno sočivo (kod takvih sočiva je odnos predmeta i lika uvek ovakav). Opet zrak koji spaja vrhove predmeta i lika



uz zadatak 116 a



uz zadatak 116 b



uz zadatak 116 c

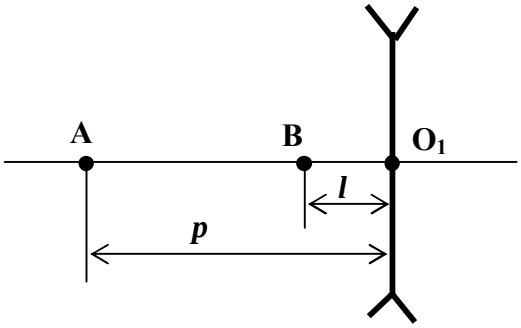
prolazi kroz centar sočiva, dalje je slično kao u prethodna dva slučaja.

116. p = 60 cm; f = - 15 cm; x = 2 cm; y = ?

Položaj lika se nalazi iz jednačine sočiva:

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l} \Rightarrow l=\frac{pf}{p+f}=\frac{60cm*15cm}{60cm+15cm}=12\,cm.$$

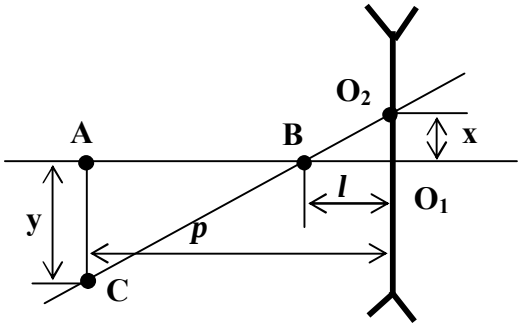
Da bi lik ostao u istoj tački B neophodno je da predmet C – novi položaj, lik B i novi položaj centra O_2 leže na istoj pravoj. (Uostalom to je osobina karakterističnog zraka) Sada je dalje stvar geometrije.



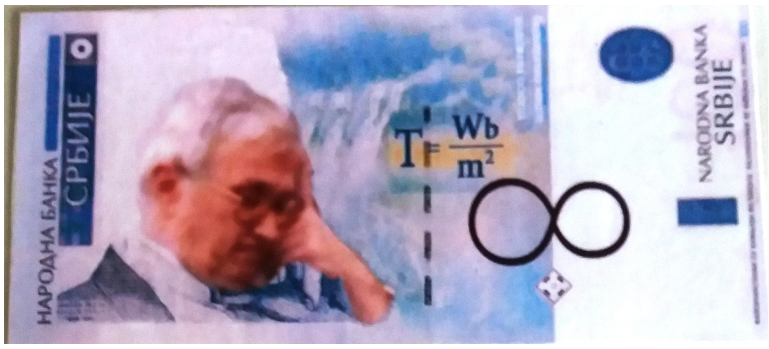
uz zadatak 116

Iz sličnosti trouglova ACB i BO_1O_2 dobija se:

$$\frac{y}{x}=\frac{p-l}{l} \Rightarrow y=\frac{p-l}{l}x \Rightarrow y=\frac{60cm-12cm}{12cm}2cm=8\ cm.$$



uz zadatak 116



7. Električno polje

7.1. Kulonov zakon

117. Uporediti jačine električne i gravitacione sile između dva elektrona. Masa elektrona je $m_e = 9{,}1*10^{-31}$ kg, a naelektrisanje $q_e = 1{,}6*10^{-19}$ C. Gravitaciona konstanta iznosi $6{,}67*10^{-11}$ Nm^2/kg^2. (**Rez.:** $\approx 4*10^{44}$)

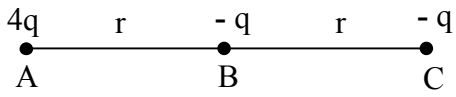
118. Dva tačkasta naelektrisanja od $-6*10^{-6}$ C i $+8*10^{-6}$ C nalaze se na nekom rastojanju. Ta dva naelektrisanja se dodirnu pa rastave na isto rastojanje.Odredi količnik intenziteta sila pre i posle dodira. (**Rez.:** 48)

119. Dva naelektrisanja, od kojih je jedno tri puta veće od drugog, nalaze se na rastojanju 27 cm, uzajamno delujući silom inteziteta 30 N. Odrediti ta naelektrisanja. (**Rez.:** $0{,}27*10^{-4}$C; $0{,}09*10^{-4}$C)

120. Dve naelektrisane kuglice nalaze se u vazduhu na rastojanju 45 cm. Koliko je rastojanje između njih ako se potope u vodu a da sila između njih ostane ista. (**Rez.:** 5 cm)

121. Na dve jednake kapljice žive nalazi se po jedan elektron viška, pri čemu se sila električnog odbijanja uravnotežava sa silom gravitacije između njih (ona je uvek privlačna). Kolika je zapremina kapljice? (**Rez.:** $1{,}37*10^{-13}$ m^3)

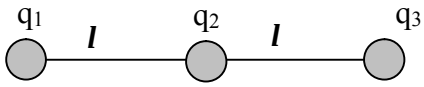
122. Odrediti električnu silu koja deluje na na naelektrisanje u tački C. (**Rez.:** 0)



uz zadatak 122

123. Dva pozitivna naelektrisanja od $4*10^{-8}$ C i $9*10^{-8}$ C nalaze se na međusobnom rastojanju 2 m. U koju tačku treba postaviti treće naelektrisanje $-2*10^{-8}$ C da bi bilo u ravnoteži sa prva dva? (**Rez.:** 0,8 m od prvog naelektrisanja)

124. Naelektrisanja 1 μC, 2 μC i 3 μC povezana su kao na slici nerastegljivim neprovodnim nitima dužine 10 cm. Naći sile zatezanja u nitima. (**Rez.:** 2,475 N; 6,075 N)



uz zadatak 124

125. U vazduhu, na tankoj neprovodnoj niti, obešena je kuglica mase 2 g, čije je naelektrisanje 20 nC. Ispod nje, na rastojanju 3cm po vertikali, nalazi se istoimeno naelektrisanje 30 nC. Odrediti silu zatezanja niti. ($g = 10$ m/s^2) (**Rez.:** 0,014 N)

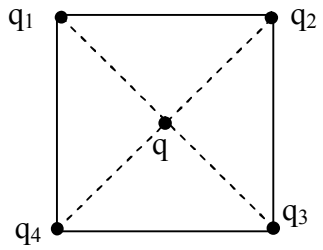
126. Dve loptice masa po 0,1 gram okačena su u jednoj tački nitima dužine 30 cm. Kada se loptice naelektrišu istim količinama naelektrisanja, razmaknu se tako da niti grade ugao od 60^0. Naći naelektrisanja loptica. Niti su neistegljive a kuglice su male zapremine. (**Rez.:** $75*10^{-9}$ C)

127. Dve jednako naelektrisane kuglice, obešene o nit jednakih dužina, potopljenje su u petrolej. Kolika mora biti gustina materijala kuglica da bi ugao u između niti u vazduhu i u petroleju bio isti. Gustina petroleja je 0,8 g/cm^3 a dielektrična konstanta 2. (**Rez.:** 1,6 g/cm^3)

128. Dve jednako naelektrisane kuglice nalaze se u vazduhu na rastojanju 30 cm od po $+10^{-6}$ C. Kolikom ukupnom elektrostatičkom deluju ta naelektrisanja na treće naelektrisanje od $2*10^{-6}$ C i koja je podjednako udaljena od oba naelektrisanja za $10\sqrt{3}$ cm. (**Rez.:** 0,6 N)

129. Četiri tačkasta naelektrisanja od po $4*10^{-9}$C, nalaze se na temenima kvadrata stranice 2 cm. Kolika električna sila deluje na svako naelektrisanje? (**Rez.:** $69*10^{-5}$ N)

130. Pozitivno naelektrisanje q = +1 nC nalazi se u centru kvadrata stranice 2 cm. U temenima kvadrata su na način prikazan na slici raspoređena naelektrisanja: q_1 = +2 nC, q_2 = - 2 nC, q_3 = - 4 nC i q_4 = +4 nC. Odrediti pravac, intenzitet i smer rezultujuće sile koja deluje na naelektrisanje q. (**Rez.:** ≈ $38*10^{-5}$ N)



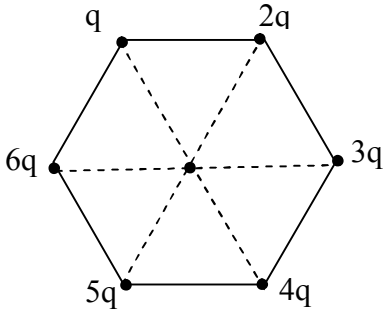
uz zadatak 130

131. a) Tri jednaka naelektrisanja od po $4*10^{-9}$ C nalaze se na temenima jednakostraničnog trougla, stranice 3 cm. Kolika sila deluje na svako naelektrisanje? (**Rez.:** $36\sqrt{3}*10^{-5}$ N)
b) Naći silu na $+q_2$ ako je q_1 pozitivno a q_3 negativno. (**Rez.** $36*10^{-5}$ N)

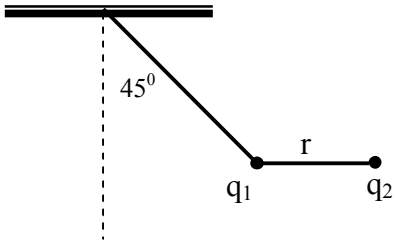
132. U temenima pravilnog šestougaonika sa stranicom 10 cm postavljena su redom tačkasta naelektrisanja q, 2q, 3q, 4q, 5q, 6q (q = 1 μC). Naći rezultujuću silu koja deluje na naelektrisanje q koje se nalazi u centru šestougaonika. (**Rez.:** 5,4 N)

133. Kuglica mase 4 g i naelektrisanja $q_1 = 3*10^{-7}$ C okačena je o nit. Kada joj se približi naelektrisanje suprotnog znaka q_2 nit se otkloni za 45^0 u odnosu na vertikalni pravac (kao na slici). Rastojanje kuglica je 6 cm. Koliko iznosi q_2 ?. (**Rez.:** $5,2*10^{-8}$ C)

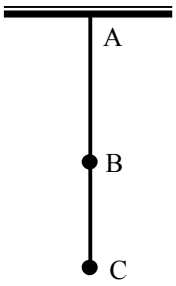
134. Dve jednake kuglice masa 0,2 g okačene su o neprovodnu nit (kao na slici). Rastojanje među centrima kuglica je 3 cm. Naći silu zatezanja na delovima niti AB i BC ako su kuglice naelektrisane jednakim količinama naelektrisanja po 10 nC. Razmotriti slučajeve:
a) istoimena naelektrisanja (**Rez.** $3*10^{-3}$ N; $4*10^{-3}$N)
b) raznoimena naelektrisanja (**Rez.:** $1*10^{-3}$N; $4*10^{-3}$ N)



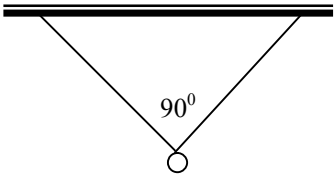
uz zadatak 132



uz zadatak 133



uz zadatak 134



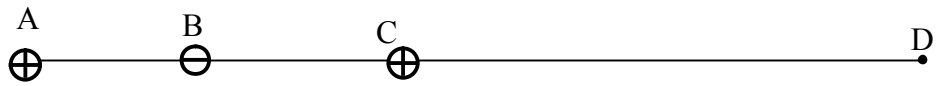
uz zadatak 135

135. Naelektrisana kuglica mase 0,588 g okačena je na neprovodnim neistegljivim nitima jednakih dužina koje međusobno zaklapaju ugao od 90^0. Na rastojanju 4,2 cm vertikalno ispod kuglice, smešta se druga kuglica, naelektrisana istom količinom kao prva, ali suprotnog znaka. Pri tome se sila zatezanja niti poveća dva puta. Odrediti naelektrisanje kuglica i silu zatezanja niti u prisustvu Kulonove sile. (**Rez.:** $3,36*10^{-8}$ C, $8,2*10^{-3}$N)

7.2. Jačina i potencijal električnog polja

136. Kolika je jačina polja u tački koja se nalazi na sredini između dve naelektrisane kuglice sa 10 μC i - 20 μC. Rastojanje između kuglica je 0,2 m. (**Rez.:** $270*10^5$ N/C)

137. Tri naelektrisanja q_A = 2 nC, q_B = - 3 nC i q_C = 4 nC leže na istoj pravi na međusobnim rastojanjima AB = 3 cm, BC = 5 cm. Kolika je jačina polja u tački D koja je udaljena od tačke C za 10 cm, kao na slici. (**Rez.:** 2557 N/C)

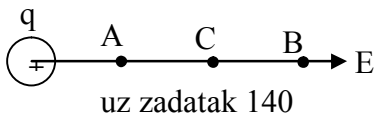


uz zadatak 137

138. U tri temena kvadrata stranice 40 cm postavljena su naelektrisanja od po $5*10^{-9}$ C. Naći jačinu i potencijal polja u četvrtom temenu kvadrata. (**Rez.:** 955 N/C; 406 V)

139. Tri naelektrisanja q_1 = 3nC, q_2 = - 4 nC, q_3 = - 2nC nalaze se u temenima jednakostraničnog trougla stranice a = 50 cm. Odrediti jačinu polja u tački koja se nalazi na sredini stranice između q_1 i q_2. (**Rez.:** 1012,6 N/C)

140. U tački A jačina električnog polja je E_A = 36 N/C, a u tački B je E_B = 9 N/C. Kolika je jačina polja u tački C koja je na sredini između tačaka A i B. (**Rez.:** 16 N/C)



uz zadatak 140

141. Dva tačkasta naelektrisanja 6 nC i – 15 nC nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju 5 cm. Odrediti jačinu polja i potencijal u tački koja je udaljena 3 cm od pozitivnog i 4 cm od negativnog naelektrisanja. (**Rez.:** $10,3*10^4$ N/C; - 2700 V)

142. Tri tačkasta naelektrisanja Q_B = - 2 pC, Q_C = 16 pC i Q_D = 5 pC se nalaze na temenima pavougaonika stranica a = $10\sqrt{3}$ cm i b = 10 cm. Odrediti električno polje u temenu A ako se sistem nalazi u vakuumu. (**Rez.:** 4,61 N/C, usmeren od D ka A)

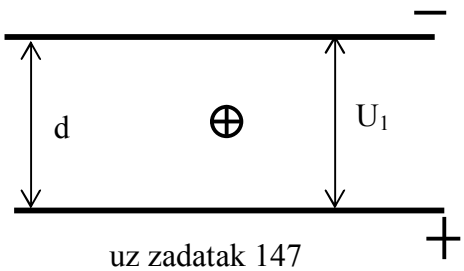
143. Dva naelektrisanja od 10 nC i – 1 nC nalaze se na rastojanju r = 1,1 m. Naći jačinu polja u tački u kojoj je potencijal nula, a tačka se nalazi na pravoj koja spaja ta dva naelektrisanja. (**Rez.:** 990 N/C i 544,7 N/C)

144. Elektron brzinom 20 km/s, uleće u homogeno električno polje u vakuumu intenziteta 0,003 N/C i kreće se suprotno smeru linija sila. Izračunati brzinu elektrona posle pređenog puta 10 cm i vreme da se postigne ta brzina. ($q_e = 1,6*10^{-19}$ C; $m_e = 9,1*10^{-31}$ kg) (**Rez.:** $2,25*10^4$ m/s; $0,47*10^{-5}$ s)

145. Elektron uleće u homogeno električno polje u vakuumu i kreće se u smeru linija sila. Početna brzina elektrona je 20 km/s, a jačina polja je 90 N/C. Opisati kretanje elektrona. (**Rez.:** kretanje je usporeno, vreme zaustavljanja $0,13*10^{-8}$ s, put zaustavljanja 0,013 mm)

146. Kuglica naelektrisana sa $8*10^{-19}$ C, lebdi između paralelnih, horizontalno postavljenih ploča, između kojih vlada napon 300 V. Ploče su u vakuumu, a njihovo međusobno rastojanje je 5 mm. Izračunati zapreminu kuglice ako je njena gustina 900 kg/m^3. (**Rez.:** $5,44*10^{-10}$ m^3)

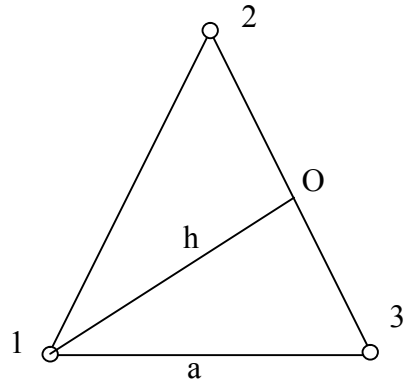
147. Pozitivna naelektrisana čestica lebdi na sredini između dve naelektrisane ploče. Razmak između ploča je 1 cm a razlika potencijala između ploča iznosi 80 V. Izračunati vreme za koje će čestica stići na gornju ploču, od momenta kada se napon poveća na 100 V. (**Rez.:** 0,063 s)



uz zadatak 147

148. Unutar **ne**naelektrisanog pločastog kondenzatora čije ploče stoje vodoravno i na međusobnom rastojanju 1 cm, nalazi se čestica prašine. Usled otpora vazduha ona pada stalnom brzinom, i put od gornje do donje ploče pređe za 10 s. Kada se čestica nađe na donjoj ploči, na kondenzator se dovode napon 980 V. Posle 5 s, penjući se ravnomerno ka gornjoj ploči, čestica stiže do nje. Odrediti odnos naelektrisanja čestice i njene mase. Sila otpora vazduha je srazmerna brzini kretanja čestice. (**Rez.:** 0,0004 C/kg)

149. Tri provodne kuglice jednakih dimenzija su raspoređene u temenima jednakostraničnog trougla kao na slici. Kuglica 1 je naelektrisana sa q_1 = 4 nC, dok su ostale dve nenaelektrisane. Provodnom niti se spoje kuglice 1 i 2 pa se odspoje. Onda se tom niti spoje kuglice 2 i 3 pa odspoje. Na kraju se spoje kuglice 1 i 3 pa odspoje. Naći potencijal u tački O. Dužina stranice iznosi a = 10 cm. Međusobni uticaji kuglica se zanemaruju. (**Rez.:** 606 V)

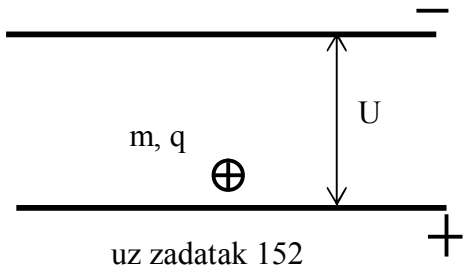


uz zadatak 149

150. Elektron izleće iz tačke u kojoj je potencijal 450 V brzinom 190 m/s ka tački čiji je potencijal 475 volti. Kolika će biti njegova brzina u toj tački? (**Rez.:** $3*10^6$ m/s)

151. Elektron uleće u homogeno električno polje brzinom $3*10^6$ m/s u smeru i pravcu linija sila. Koliku brzinu će imati posle pređene potencijalske razlike 25 V? (**Rez.:** $1*10^6$ m/s)

152. Ploče kondezatora su postavljene horizontalno. Napon na pločama je 100 V. Blizu donje ploče nalazi se pozitina čestica mase m = $2*10^{-4}$ kg i naelektrisanja q = $3*10^{-6}$ C. Kolika je brzina udara čestice u gornju ploču ako je u tom trenutku priraštaj njene potencijalne energije u gravitacionom polju jednak trećini njene kinetičke energije. (**Rez.:** 0,15 m/s)



uz zadatak 152

153. Proton i alfa čestica ubrzavaju se potencijalskom razlikom 10 V. Ovako ubrzane čestice istovremeno uleću u bezvazdušni prostor (bez polja). Naći odnos njihovih puteva posle 1 μs? Poznato je da alfa čestica ima dva puta veće naelektrisanje i četiri puta veću masu od protona. (**Rez.:** $s_p / s_\alpha = \sqrt{2}$ **)**

154. Dve koncentrične sferne površine poluprečnika 6 cm i 10 cm ravnomerno su naelektrisane količinama naelektrisanja 1 nC i – 0,5 nC. Naći jačinu polja u tačkama udaljenim 5 cm, 9 cm i 15 cm od centra sfere . (**Rez.:** 0; $1/9*10^4$ N/C; 200 N/C)

155. Koliki rad treba izvršiti da bi se dva naelektrisanja 2 μC i 3 μC, koja se nalaze u vazduhu na rastojanju 60 cm jedno od drugog, približilo na rastojanje 30 cm jedno od drugog. (**Rez.:** $90*10^{-3}$J)

156. Metalna lopta težine 3 N naelektrisana je količinom naelektrisanja 0,2 μC. Kolika je potencijalna razlika između površine lopte i tačke koja je udaljena za veličinu poluprečnika od njene površine? Gustina metala od kog je lopta sačinjena iznosi 2700 kg/m^3. (Zapremina lopte je $V = \frac{4}{3}R^3\pi,\ \pi = 3{,}14$) (**Rez.:** $300*10^3$ V)

157. Iznad površine Zemlje uspostavljeno je u vertikalnom pravcu homogeno električno polje, koje ubrzava pozitivno naelektrisanu česticu vertikalno naviše. Kada čestica dostigne visinu h = 0,5 m, električno polje se isključuje i čestica nastavlja da se kreće naviše do visine H = 2 m. Masa čestice je m = 0,002 g, a naelektrsanje $q = 10^{-9}$ C. Ako je čestica u početnom trenutku mirovala, izračunati jačinu električnog polja i brzinu čestice u trenutku isključenja polja. (**Rez.:** $7{,}8*10^4$V/m; 5,4 m/s)

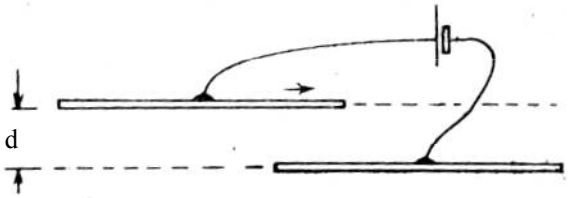
158. Između ploča kondenzatora vlada napon 5 V. Rastojanje između ploča je 0,1 m. Sa pozitivne ploče izleće elektron brzinom $8*10^5$ m/s. Do kog rastojanja će stići elektron i početi da se vraća? (**Rez.:** 0,036 m)

159. Rastojanje između ploča kondenzatora je 2 mm. Površina svake njegove ploče iznosi 150 cm^2. Koliki je kapacitet kondenzatora ako se između ploča kao dielektrik (izolator) nalazi: a) vazduh b) staklo relativne dielktrične konstante 7? (**Rez.:** a) 66,4 pF, b) 464,8 pF)

160. Naći kapacitet usamljene kugle. Izračunati poluprečnik kugle koja bi imala kapacitet 1F. (**Rez.:** $9*10^9$ m)

161. Provodnik kapaciteta C_1 naelektrisan je do potencijala φ_1, a provodnik kapaciteta C_2 do potencijala φ_2. Provodnici su dovoljno udaljeni, tako da ne utiču jedan na drugog. Koliki će im biti potencijali ako se spoje provodnom niti? (**Rez.:** $\varphi = \dfrac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}$**)**

162. Dve metalne ploče u obliku kvadrata, stranica 10 cm, postavljene su paralelno, na rastojanju 5 cm, pa se jedna kreće brzinom 0,1 mm/s, kao na slici. Kako se menja kapacitet kondenzatora u toku vremena? (**Rez.:** $C = \varepsilon_0 \dfrac{avt}{d}$)



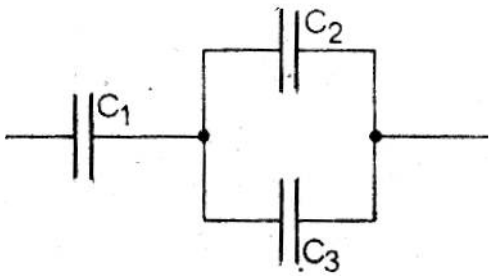
uz zadatak 162

163. Između ploča vazdušnog kondenzatora je napon 200 V, a rastojanje 5 cm. Kako se menja napon i jačina polja u kondenzatoru ako se ploče razmaknu na 10 cm? Kondenzator je odvojen od izvora napona. (**Rez.:** Napon se poveća dva puta, jačina polja ostaje ista)

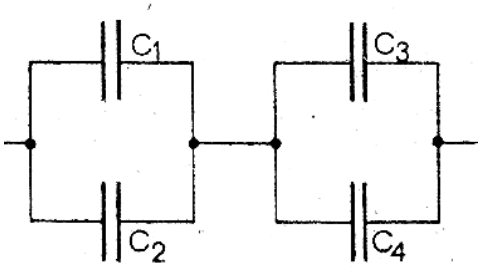
164. Pločasti vazdušni kondenzator kapaciteta C = 20 nF naelektrisan je do napona 100 V i odvojen od izvora. Koliki rad treba izvršiti da bi se dva puta povećalo rastojanje između ploča? (Energija kondenzatora iznosi $W = \dfrac{1}{2}CU^2$) (**Rez.:** 10^{-4}J)

165. Tri kondenzatora C_1 = 200 μF, C_2 = 100 μF i C_3 = 300 μF vezana su kao na slici. Koliki ekvivalentni kapacitet? (**Rez.:** 133 μF)

166. Četiri kondenzatora kapaciteta $C_1 = C_2$ = 100 pF i $C_3 = C_4$ = 200 pF, vezana su kao na slici. Koliki je ekvivalentni kapacitet ove veze? (**Rez.:** 133 pF)

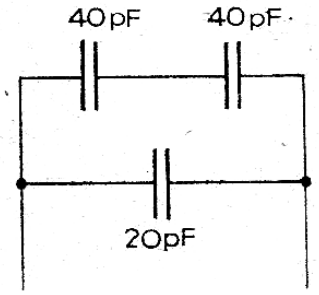


uz zadatak 165

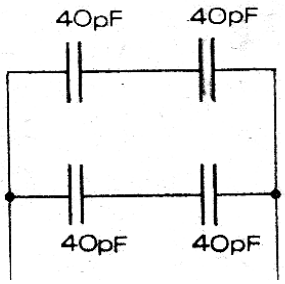


uz zadatak 166

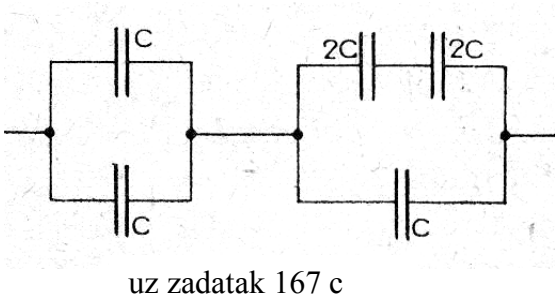
167. Sada, kada ste naučili nalaženje ekvivalentnog kapaciteta, napamet odredite kapacitete sledećih šema prikazanih na slikama. (**Rez.:** a) 40 pF; b) 40 pF; c) C)



uz zadatak 167 a

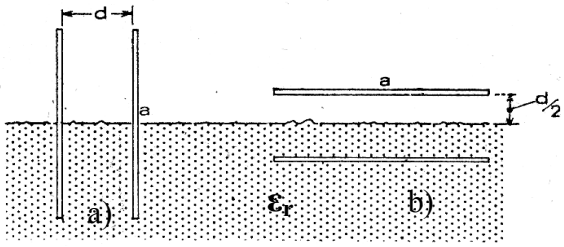


uz zadatak 167 b



uz zadatak 167 c

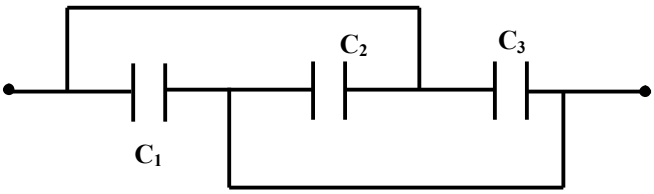
168. Kondenzator je načinjen od ravnih ploča u obliku kvadrata, stranica a = 10 cm, koje se nalaze na međusobnom rastojanju d = 4 mm u vazduhu. Koliki je kapacitetet ovog kondenzatora kada se on do polovine potopi u vodu na dva prikazana načina. Relativna dielektrična konstanta vode iznosi $\varepsilon_r = 81$. (**Rez.:** a) 907 pF, 43,7 pF)



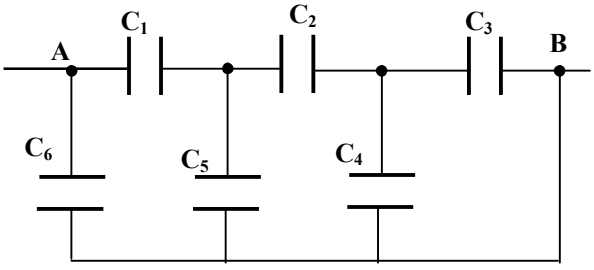
uz zadatak 168

169. Izračunati ekvivalentni kapacitet šeme na slici. (**Rez.:** $C_e = C_1 + C_2 + C_3$)

170. Izračunati ekvivalentni kapacitet šeme na slici. $C_1 = 4\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$, $C_4 = 4\ \mu F$, $C_5 = 1{,}6\ \mu F$, $C_6 = 2\ \mu F$. (**Rez.:** 4 μF)



uz zadatak 169



uz zadatak 170

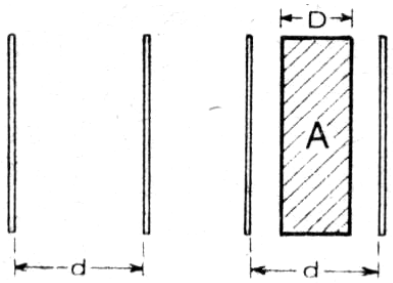
171. Tri kondenzatora kapaciteta 2 μF, 3μF, 6 μF vezana su paralelno na napon od 110 V. Odrediti ekvivalentni kapacitet i ukupnu količinu naelektrisanja na sva tri kondenzatora i količinu elektriciteta pojedinih kondenzatora. (**Rez.:** 11 μF, 1210 μC (ukupno), 220 μC, 330 μC, 660 μC)

172. Kondenzatori iz prethodnog zadatka sada su vezani redno (serijski). Izračunati ukupnu količinu elektriciteta na sva tri kondenzatora, kao i napone na pojedinim kondenzatorima, ako je ukupni napon 110 V. (**Rez.:** 1μF, 110 μC, 55 V, 36,7 V, 18, 3 V)

173. Naponi na krajevima naelektrisanih kondenzatora, kapacitivnosti $C_1 = 0{,}3\ \mu F$, a $C_2 = 0{,}2\ \mu F$ iznose $U_1 = 50$ V i $U_2 = 40$ V. Koliki će biti napon na krajevima paralelne veze ovih kondenzatora. (**Rez.:** 46 V i 14 V – ima dva slučaja!)

174. Kondenzator kapaciteta 6 μF naelektrisan je do napona od 400 V. Ovaj kondenzator se veže paralelno sa nenaelektrisanim kondenzatorom kapaciteta 10 μF. Odrediti koliki će biti napon i količina naelektrisanja na svakom kondenzatoru pojedinačno posle njihovog vezivanja.
(**Rez.:** 150 V; $9*10^{-4}$ C; $15*10^{-4}$ C)

175. Rastojanje između ploča kondenzatora iznosi d = 100 cm. Ploče su u obliku kvadrata a = d i nalaze se u vazduhu.
a) koliki je kapacitet ovog kondenzatora?
b) Koliki je kapacitet ovog kondenzatora ako se između njegovih ploča simetrično postavi metalna ploča A, debljine D = a/2?
(**Rez.:** a) 8,85 pF; 17,7 pF)



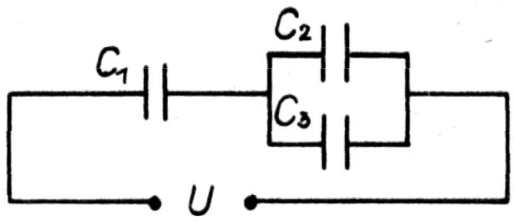
uz zadatak 175

176. Između ploča pločastog kondenzatora postavi se ploča od stakla, relativne dielektrične propustljivosti ε_r, paralelno pločama kondenzatora. Ako je kapacitet kondenzatora pre stavljanja ploča C_0, rastojanje između ploča d, i ako je debljina staklene ploče d_1, odrediti kapacitet kondenzatora posle stavljanja staklene ploče.
(**Rez.:** $C_e = \dfrac{\varepsilon_r C_0 d}{d_1 + \varepsilon_r (d - d_1)}$)

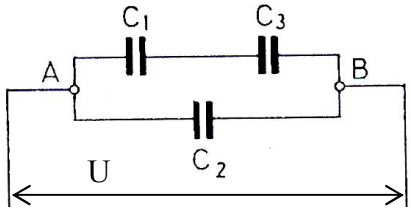
177. Pet pločastih kondenzatora jednakih dimenzija spojeni su redno i priključeni na napon 10 V. Između ploča je tečni dielektrik (izolator) čija je relativna dielektrična propustljivost 2,1. Ovaj sistem kondenzatora se odvoji od izvora napona.Kako će se promeniti napon na krajevima veze ako iz tri kondenzatora isteče dielektrik? (**Rez.:** 6,6 V)

178. Tri kondenzatora kapaciteta C_1 = 1 μF; C_2 = 2 μF; C_3 = 3 μF, vezani su kao na slici i priključeni na napon od 12 V. Odrediti naelektrisanje na svakom kondenzatoru. (**Rez.:** 10 μC; 4 μC; 6 μC)

179. Tri kondenzatora kapaciteta C_1 = 1 μF; C_2 = 2 μF; C_3 = 3 μF, vezani su kao na slici i priključeni na napon od 12 V. Odrediti naelektrisanje na svakom kondenzatoru. (**Rez.:** 9 μC; 24 μC; 9 μC)

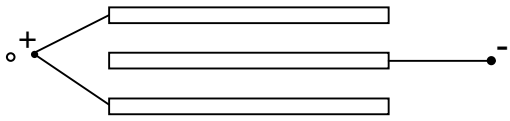


uz zadatak 178



uz zadatak 179

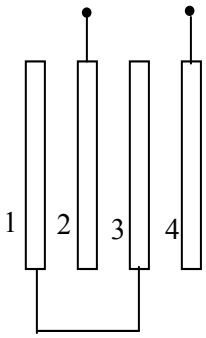
180. Tri jednake metalne ploče svaka površine 100 cm^2 spojene su kao na slici. Rastojanja među pločama su po 5 cm. Odrediti kapacitet šeme.



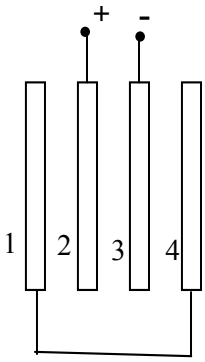
Uz zadatak 180

181. Četiri jednake metalne ploče površine S i međusobnog rastojanja d postavljene su kao na slici. Odrediti kapacitet šeme.

182. Isti tekst kao prethodni zadatak.



Uz zadatak 181

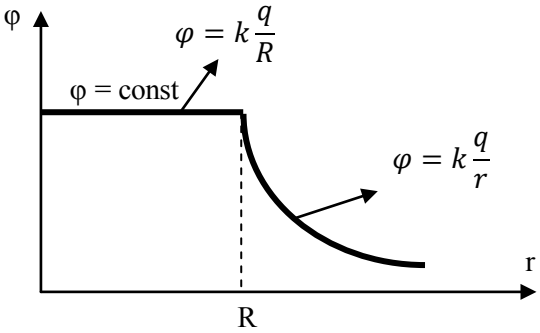


Uz zadatak 182

Za sledeće zadatke potrebna su nam nova znanja.

Električno polje unutar metalne naelektrisane sferne ljuske je jednako nuli. Ovo smo već koristili u zadatku 154. Na osnovu toga se formira takozvani Faradejev kavez, koji služi za elektrostatičku zaštitu instrumenta.

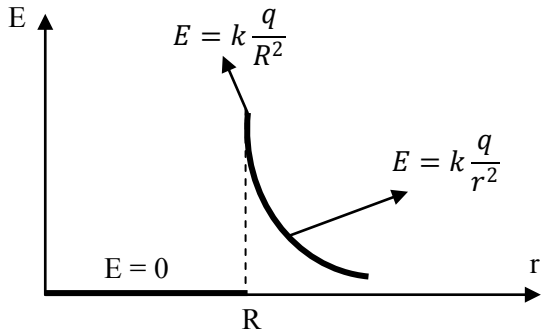
Električno polje unutar pune metalne kugle je takođe nula. Ako se kugla naelektriše naelektrisanje se raspoređuje po površini kugle (**naelektrisanje "beži" na površinu**).
Posledica činjenice da je električno polje nula je, da je potencijal u unutrašnjosti metalne kugle (i metalne ljuske) stalan (konstantan) i jednak onom na površini.
To bi moglo ovako da se pokaže:
E = U/d (već korišćena relacija), ili, $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$, *ako je* $E = 0 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ *ili* $\varphi_1 = \varphi_2$ *tj.* $\varphi = const.$



Dijagram potencijala metalne kugle ili metalne sfere poluprečnika R

Ovo je dijagram potencijala naelektrisane metalne sferne ljuske ili kugle poluprečnika R.
1/r je funkcija indirektne proporcionalnosti, kao y = a/x, što smo učili u matematici.

Za ljubopitljive dajemo i dijagram električnog polja metalne sferne ljuske ili kugle.
I dalje je u pitanju funkcija indirektne proporcionalnosti, samo je kriva strmija jer je električno polje obrnuto srazmerno kvadratu rastojanja $1/r^2$

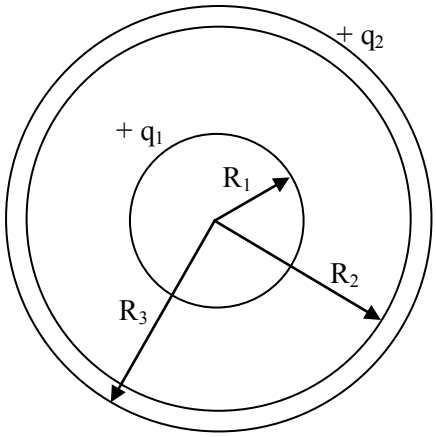


Dijagram električnog polja metalne kugle ili metalne sfere poluprečnika R

183. Dve metalne koncentrične sfere imaju poluprečnike 4 cm i 6 cm. Na unutrašnjoj sferi se nalazi se naelektrisanje 20 nC a na spoljašnjoj 70 nC. Odredi jačinu polja i potencijal na rastojanjima 3 cm, 6cm i 12 cm.
(**Rez:** 0, 50000 N/C, 56250 N/C; 10800 V, 9300 V, 6750 V)

184. Metalna kugla poluprečnika 5 cm nalazi se na potencijalu 1000 V i okružena je većom nenaelektrisanom metalnom ljuskom poluprečnika 10 cm. Koliki će biti potencijal manje kugle ako se spoje provodnikom? (**Rez:** 500 V)

185. Na metalnoj kugli poluprečnika R_1 nalazi se pozitivno naelektrisanje q_1. Oko kugle se koncentrično postavi sferna metalna ljuska unutrašnjeg poluprečnika R_2 i spoljašnjeg poluprečnika R_3. Metalna ljuska je naelektrisana sa pozitivnim naelektrisanjem q_2 (slika). Sistem se nalazi u vazduhu. Zatim se kugla i sferna ljuska spoje provodnikom.
Posle spajanja odrediti: a) naelektrisanje kugle
b) naelektrisanje ljuske
c) potencijal ljuske d) potencijal kugle
e) razliku potencijala između ljuske i kugle.



186. Metalna kugla poluprečnika R_1 i potencijala φ_1 okružena je sfernom nenaelektrisanom metalnom ljuskom poluprečnika R_2. Koliki će biti potencijal kugle ako ljusku uzemljimo?

187. Unutar sferne metalne ljuske poluprečnika R naelektrisana sa naelektrisanjem q stavljena je metalna nenaelektrisana kugla poluprečnika r. Centri kugle i ljuske se poklapaju. Zatim se kugla uzemlji. Naći potencijal ljuske, i jačinu električnog polja van ljuske.

188. Dve metalne kugle poluprečnika r, obe naelektrisane sa naelektrisanjem q, nalaze sa na rastojanju a. Prva kugla se uzemlji pa se uzemljujući provodnik skloni. Zatim se to ponovi sa drugom kuglom.

a) Naći potencijal prve kugle.

b) Ako se postupak ponovi, kolika su naelektrisanja kugli posle n - tog uzemljenja druge kugle?

7.1. Kulonov zakon - rešenja

117. $m_e = 9{,}1*10^{-31}$ kg; $q_e = 1{,}6*10^{-19}$ C; $\gamma = 6{,}67*10^{-11}$ Nm^2/kg^2; $k = 9*10^9 Nm^2/C^2$; $F_{el} / F_{grav} = ?$

Podsetimo se Njutnovog zakona gravitacije:

$F_{gr} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ Kulonov zakon glasi: $F_{el} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ U našem slučaju to bi izgledalo:

$F_{gr} = \gamma \frac{m_e^2}{r^2}, \quad F_{el} = k \frac{q_e^2}{r^2}$

Ako napravimo traženi količnik:

$$\frac{F_{el}}{F_{gr}} = \frac{k \frac{q_e^2}{r^2}}{\gamma \frac{m_e^2}{r^2}} = \frac{k q_e^2}{\gamma m_e^2}$$

Zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$\frac{F_{el}}{F_{gr}} = \frac{9*10^9 \left(1{,}6*10^{-19}\right)^2 \left[\frac{Nm^2}{C^2} C^2\right]}{6{,}67*10^{-11} \left(9{,}1*10^{-31}\right)^2 \left[\frac{Nm^2}{kg^2} kg^2\right]} \approx 4*10^{44}$$

Ovaj broj je nezamislivo velik.
Ako bi ga napisali to bi bila četvorka i 44 nule! Zato se kaže da je gravitaciona sila najslabija sila u prirodi. Ali ipak je, takva kakva je, odgovorna za strukturu vasione! Raspored zvazda i galaksija je ovakav zahvaljujući delovanju te najslabije sile.

118. $q_1 = -6*10^{-6}$ C; $q_2 = +8*10^{-6}$ C; $F_1 / F_2 = ?$

U slučaju dodira dva tačkasta naelektrisanja (zanemarljivih dimenzija) dolazi do preraspodele naelektrisanja. Posle dodira naelektrisanja će biti $q_1' = q_2' = \frac{q_1 + q_2}{2} = 1*10^{-6} C$ - srednja vrednost na svakom. Sile pre i posle dodira su:

$F_1 = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad F_2 = k \frac{q_1' q_2'}{r^2}$ Količnik sila je $\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1 q_2}{q_1' q_2'} = 48.$

119. $q_1 = 3q_2$; $r = 0{,}27$ m; $F = 30$ N; $k = 9*10^9 Nm^2/C^2$; $q_1 = ?, q_2 = ?$

Napisaćemo Kulonov zakon:

$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = k \frac{3 q_2 q_2}{r^2} \Rightarrow F = k \frac{3 q_2^2}{r^2} \Rightarrow q_2 = \sqrt{\frac{F r^2}{3k}}$ Rastojanje se može izneti ispred znaka korena:

$$q_2 = r\sqrt{\frac{F}{3k}} \Rightarrow q_2 = 0{,}27m \sqrt{\frac{30N}{3*9*10^9\ Nm^2/C^2}} \Rightarrow q_2 = 0{,}27m \sqrt{\frac{10^{-8} C^2}{9\ m^2}} = 0{,}09*10^{-4} C.$$

$q_1 = 0{,}27*10^{-4}$ C.

120. $r_1 = 45$ cm; $\varepsilon_r = 81$; $r_2 = ?$

Kulonov zakon u vakuumu a i u vazduhu glasi: $F = k \frac{q_1 q_2}{r_1^2}$

U nekoj sredini glasi: $F = \frac{k}{\varepsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r_2^2}$ Ovde je ε_r relativna dielektrična konstanta sredine. Za vodu iznosi 81. Ako izjednačimo sile: $\frac{k}{\varepsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r_2^2} = k \frac{q_1 q_2}{r_1^2}$ $\quad r_2 = r_1/9 = 5$ cm.

121. $e = 1{,}6*10^{-19}$ C (nelektrisanje jednog elektrona); $\gamma = 6{,}67*10^{-11}Nm^2/kg^2$; $\varrho = 13600$ kg/m^3; V = ?

Napisaćemo izraze za gravitacionu i električnu silu. Zapremina kapljice krije se u masi.

$F_{gr} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$; $F_{el} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ U ovom slučaju je

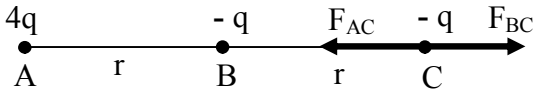
$F_{gr} = \gamma \frac{m^2}{r^2}$; $F_{el} = k\frac{e^2}{r^2}$ Ako izjednačimo sile dobijamo:

$$m = e\sqrt{\frac{k}{\gamma}} = 1{,}6*10^{-19}C\sqrt{\frac{9*10^9\ Nm^2/C^2}{6{,}67*10^{-11}\ Nm^2/kg^2}} \Rightarrow m = 1{,}86*10^{-9}\text{kg}.\quad V = \frac{m}{\rho} = 1{,}37*10^{-13}m^3.$$

122. Na naelektrisanje u tački C deluju dve sile F_{AC} i F_{BC}. Prema znaku naelektrisanja prva je privlačna a druga odbojna. Sile se crtaju tako da polaze iz zadate tačke tj. iz C.
Intenziteti sila su: (Obratiti pažnju da je AC = 2r)

$$F_{AC} = k\frac{4q*q}{(2r)^2} = k\frac{4q^2}{4r^2} = k\frac{q^2}{r^2},\quad F_{BC} = k\frac{q*q}{r^2} = k\frac{q^2}{r^2}$$

Znači $\mathbf{F_{rez} = 0}$.

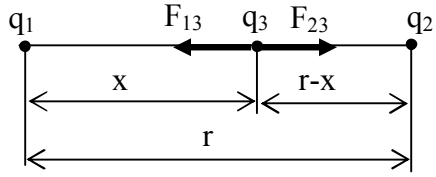


uz zadatak 122

123. $q_1 = 4*10^{-8}$ C; $q_2 = 9*10^{-8}$ C; r = 2 m; $q_3 = -2*10^{-8}$ C; x = ?

Da bi treće naelektrisanje bilo u ravnoteži sila na njega treba da je nula. Treće naelektrisanje se mora nalaziti na pravoj koja spaja prva dva naelektrisanja i to između njih. U protivnom sila ne može nikako biti nula.

$$F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{x^2},\quad F_{23} = k\frac{q_2 q_3}{(r-x)^2}$$



uz zadatak 123

$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \quad k\frac{q_1 q_3}{x^2} = k\frac{q_2 q_3}{(r-x)^2} \Rightarrow q_1(r-x)^2 = q_2 x^2$

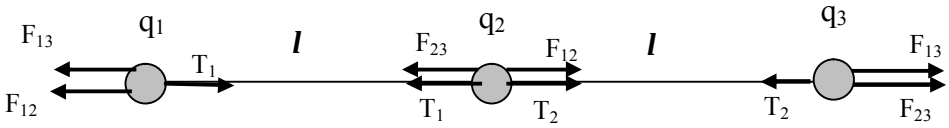
odavde je $(r-x)^2 = \frac{q_2 x^2}{q_1} \Rightarrow (r-x)^2 = \frac{9*10^{-8}Cx^2}{4*10^{-8}C}$

Da bi lakše razrešili ovu jednačinu zamenili smo brojne vrednosti. Ako se izraz korenuje preostaje:

$r - x = \frac{3}{2}x \Rightarrow r = \frac{5}{2}x,\ \Rightarrow x = \frac{2r}{5}$ i, konačno **x = 0,8 m**.

124. $q_1 = 1\mu$C; $q_2 = 2\mu$C; $q_3 = 3\ \mu$C; l = 10 cm; T_1 = ?; T_2 = ?

Dovoljno je posmatrati prvo i treće naelektrisanje. Vidi se da je:
$T_1 = F_{13} + F_{12}$ i
$T_2 = F_{13} + F_{23}$



uz zadatak 124

$$F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{(2l)^2} = 9*10^9\frac{1*10^{-6}*3*10^{-6}}{(0{,}2)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right] = \frac{27*10^{-3}}{0{,}04}N = 0{,}675N.$$

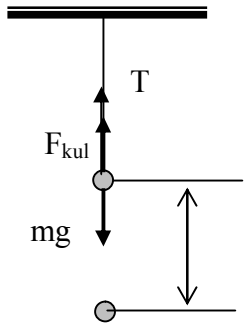
$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{l^2} = 9*10^9\frac{1*10^{-6}*2*10^{-6}}{0{,}1^2}N = 1{,}8N.$$

$$F_{23} = k\frac{q_2 q_3}{l^2} = 9*10^9\frac{2*10^{-6}*3*10^{-6}}{0{,}1^2}N = 5{,}4N.$$

Znači:
T_1 = 0,675 N + 1,8 N = 2,745 N.
T_2 = 0,675 N + 5,4 N = 6,075 N.

125. m = 2g = $2*10^{-3}$ kg; q_1 = 20 nC = $2*10^{-8}$ C; q_2 = 30 nC = $3*10^{-8}$ C; r = 3 cm = $3*10^{-3}$m; T = ?

Sa slike se vidi da je ravnoteža postignuta pri uslovu:



uz zadatak 125

$T + F_{kul} = mg \Rightarrow T = mg - F_{kul}$

$mg = 2*10^{-2}$ N = 0,02 N.

$$F_{kul} = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9*10^9 \frac{2*10^{-8}*3*10^{-8}}{9*10^{-4}}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right] = 0{,}006N$$

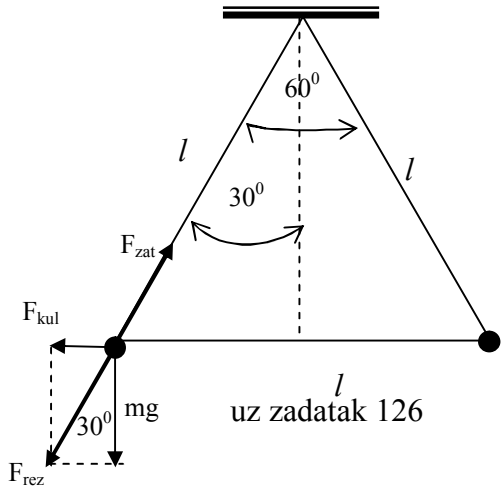
T = 0,02 N – 0,006 N = **0,014 N.**

126. m = 0,1 g; *l* = 30 cm; g = 9,81 m/s^2;α = 60^0; k =$9*10^9$ Nm^2/C^2; q = ?

Da bi kuglice bile u ravnoteži rezultujuća sila mora da deluje duž konca (tj. jednaka je sili zatezanja) inače bi se kuglice pomerale.

Sila zemljine teže iznosi: mg = $0{,}1*10^{-3}$kg$*$9,81m/s^2 = $9{,}81*10^{-4}$ N.

Ako se podsetimo jednakostraničnog trougla vidimo da je **mg** visina a F_{rez} stranica:



uz zadatak 126

$$mg = \frac{F_{rez}\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F_{rez} = \frac{2mg}{\sqrt{3}} = \frac{2*9{,}81*10^{-4}N}{1{,}73} = 11{,}34*10^{-4}N.$$

(Ovolika je i sila zatezanja)

Takođe je Kulonova sila jednaka polovini F_{rez} (po istim svojstvima jednakostraničnog trougla):

$F_{kul} = 5{,}67*10^{-4}$ N.

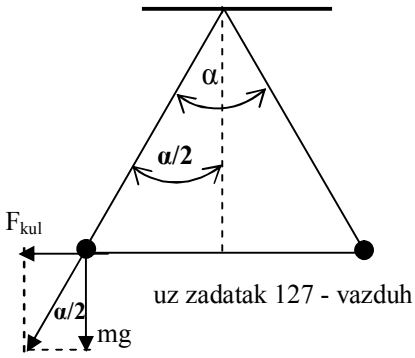
Dalje primenjujemo Kulonov zakon: (rastojanje između kuglica je *l*)

$$F_{kul} = k\frac{q^2}{l^2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{F_{kul}l^2}{k}} = \sqrt{\frac{5{,}67*10^{-4}0{,}3^2}{9*10^9}\left[\frac{Nm^2}{Nm^2/C^2}\right]} = 75*10^{-9}C.$$

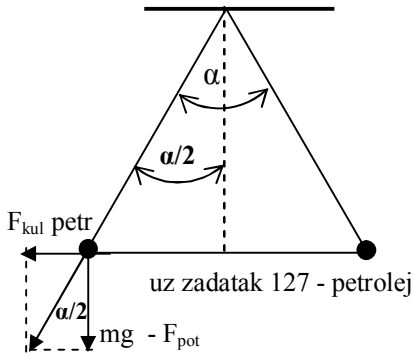
127. ϱ_{pet} = 0,8 g/cm^3, ε_r = 2; ϱ = ?

Kada se kuglice potope u petrolej, Kulonova sila se smanjuje ali deluje i sila potiska suprotno od mg: $F_{pot} = \varrho_{pet}gV$; tako da ugao može ostati isti.

Dalje ćemo koristiti sličnost trouglova.



uz zadatak 127 - vazduh



uz zadatak 127 - petrolej

$$\frac{F_{kul}^{vazduh}}{F_{kul}^{petr}} = \frac{mg}{mg - F_{pot}}$$

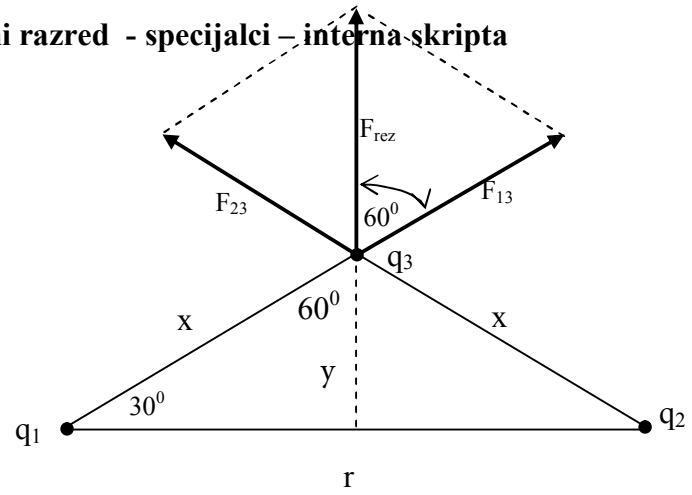
masa je m = ϱV

$$\frac{k\frac{q^2}{r^2}}{\frac{k}{\varepsilon_r}\frac{q^2}{r^2}} = \frac{\rho V}{\rho V - \rho_{pet}gV}$$ Posle silnih skraćivanja preostaje $\varepsilon_r = \frac{\rho}{\rho - \rho_{pet}}$

Posle kraćih izračunavanja (PKI) $\rho = \frac{\rho_{pet}\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} = 1{,}6\frac{g}{cm^3}$

128. $q_1 = q_2 = 10^{-6}$ C, $q_3 = 2*10^{-6}$ C; r = 30 cm; x = $10\sqrt{3}$ cm; F_{rez} = ?

Opet treba biti vešt u geometriji. Podaci bi odgovarali da se naelektrisanja nalaze u temenima jednakokrakog trougla jer je **x + x > r** . Ako se primeni Pitagorina teorema dobija se y=x/2 pa dolazimo do uglova kao na slici:



uz zadatak 128

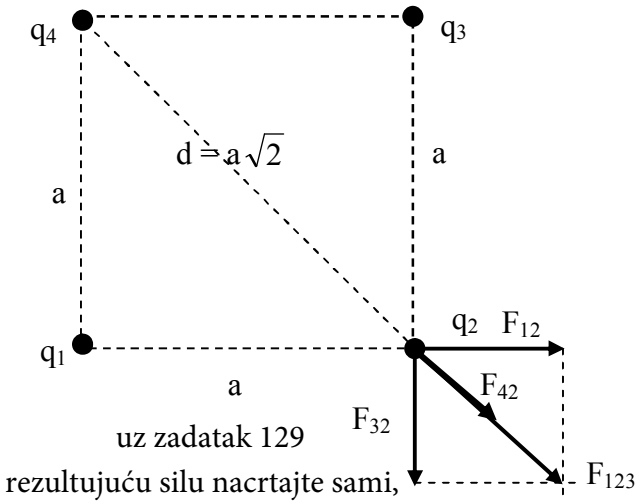
Sila na treće naelektrisanje je:

$$F_{13} = F_{23} = k\frac{q_1 q_2}{x^2} =$$

$$F = 9*10^9 \frac{10^{-6}*2*10^{-6}}{\left(0{,}1\sqrt{3}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right] = 0{,}6N$$

Daljom primenom geometrije (naspram istih stranica leže isti uglovi) zaključujemo da je
F_{rez} = 0,6 N.

129. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 4*10^{-9}$ C; a = 2cm = $2*10^{-2}$ m; F = ?



uz zadatak 129

rezultujuću silu nacrtajte sami, crtež je preopterećen

Sila na svako naelektrisanje je ista, zbog simetrije problema. Zato je dovoljno izračunati silu na bilo koje naelektrisanje.

$$F_{12} = F_{23} = k\frac{q^2}{a^2} = 9*10^9 \frac{\left(4*10^{-9}\right)^2}{\left(2*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right]$$

$$F_{12} = F_{23} = 36*10^{-5}\,N$$

Ove dve sile grade prav ugao pa važi Pitagorina teorema:
(I sile obrazuju kvadrat)

$F_{123} = F_{12}\sqrt{2} \approx 51*10^{-5}$ N

sila od četvrtog naelektrisanja je:

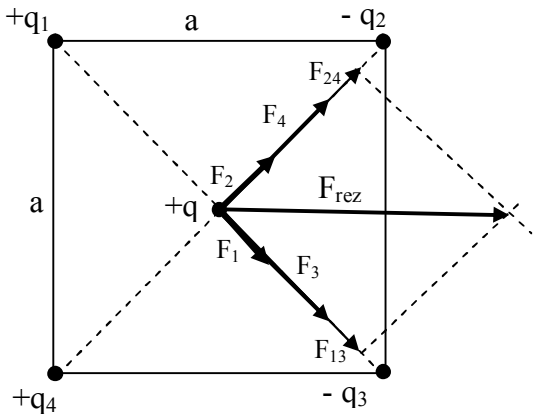
$$F_{24} = k\frac{q^2}{d^2} = 9*10^9 \frac{\left(4*10^{-9}\right)^2}{\left(2\sqrt{2}*10^{-2}\right)^2} = 18*10^{-5}\,N.$$

Ova sila deluje duž dijagonale: **F_{rez} = F_{123} + F_{24} = 69*10^{-5} N**.

130. q = +1 nC; q_1 = +2 nC; q_2 = - 2 nC; q_3 = - 4 nC; q_4 = +4 nC; a = 2 cm: F_{rez} = ?

Rastojanje naelektrisanja q i ostalih je pola dijagonale:

$r = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}cm.$ Sile koje deluju na naelektrisanje q iznose:



uz zadatak 130

$$F_1 = F_2 = k\frac{qq_1}{r^2} = 9*10^9 \frac{1*10^{-9}*2*10^{-9}}{\left(\sqrt{2}*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right] = 9*10^{-5}\,N.$$

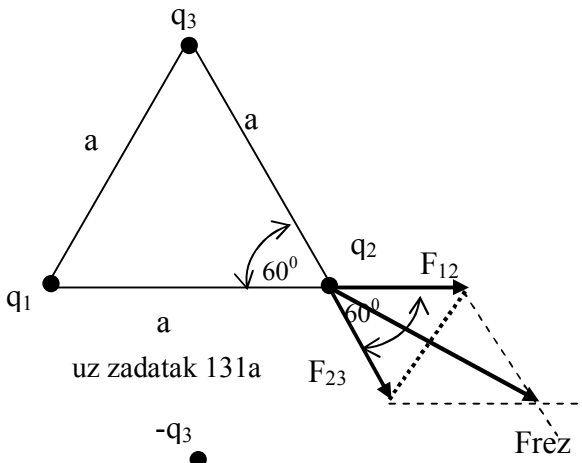
$$F_3 = F_4 = k\frac{qq_3}{r^2} = 9*10^9 \frac{1*10^{-9}*4*10^{-9}}{\left(\sqrt{2}*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right] = 18*10^{-5}\,N.$$

Sile F_1 i F_3 deluju u istom pravcu i smeru pa im je rezultanta $F_{13} = 27*10^{-5}$ N. Slično važi za F_2 i F_4 pa je $F_{24} = 27*10^{-5}$ N

Ugao između dijagonala je 90^0 pa važi:

$$F_{rez} = \sqrt{F_{13}^2 + F_{24}^2} = F_{13}\sqrt{2} \approx 38*10^{-5}\,N.$$

131. $q_1 = q_2 = q_3 = 4*10^{-9}$C, a =3 cm; F_{rez} = ?



uz zadatak 131a

a) Sile između svakog para naelektrisanja je ista. Dovoljno je posmatrati samo jedno naelektrisanje, naprimer q_2.

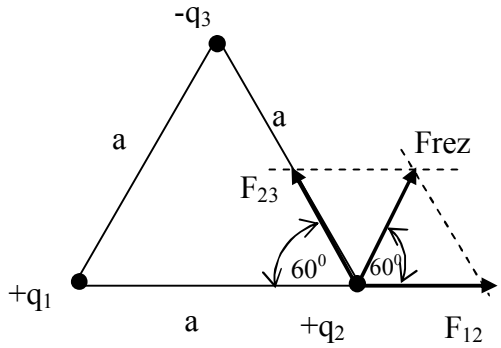
$$F_{12} = F_{23} = k\frac{q^2}{a^2} = 9*10^9\frac{\left(4*10^{-9}\right)^2}{\left(3*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right]$$

$$F_{12} = 36*10^{-5}\,N.$$

Sile obrazuju romb čiji je jedan ugao 60^0. Polovina tog romba je jednakostranični trougao, pa je rezultujuća sila jednaka dve visine:

$$F_{rez} = 2\frac{F_{12}\sqrt{3}}{2} = F_{12}\sqrt{3} = 36\sqrt{3}*10^{-5}\,N.$$

b) Ovaj zadatak treba da posluži kao vežba u crtanju smerova sila. Inteziteti sila ostaju isti po $36*10^{-5}$ N. Na osnovu svojstava jednakostraničnog trougla i rezultujuća sila je tolika $\mathbf{F_{rez} = 36*10^{-5}}$ **N.**



uz zadatak 131b

132. a = 10 cm; q = 10^{-6} C, F_{rez} = ?

Sile koje deluju na centralno naelektrisanje iznose:

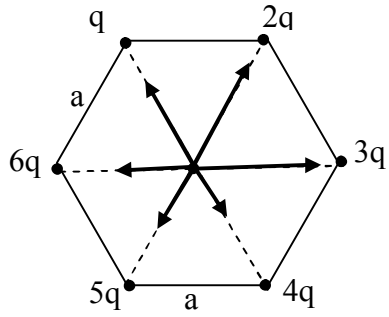
$$F_1 = k\frac{q^2}{a^2};\ F_2 = k\frac{2q^2}{a^2};\ F_3 = k\frac{3q^2}{a^2};\ F_4 = k\frac{4q^2}{a^2};\ F_5 = k\frac{5q^2}{a^2};\ F_6 = k\frac{6q^2}{a^2}$$

Parovi sila koje imaju isti pravac a suprotan smer daju sile istih intenziteta:

$$F_{63} = k\frac{3q^2}{a^2} = F_{52} = F_{41}$$

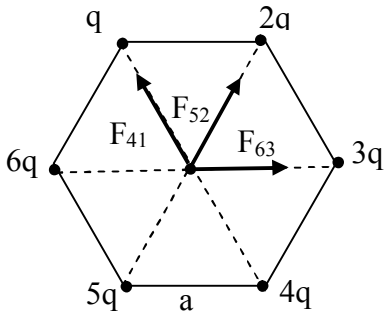
Sile F_{41} i F_{63} zaklapaju ugao 120^0 a jednake su, znači njena rezultanta je isto tolika (na osnovu svojstava jednakostraničnog trougla). Ne zaboraviti ni silu F_{52}.

$F_{rez} = F_{6341} + F_{52} = 2F_{52}$



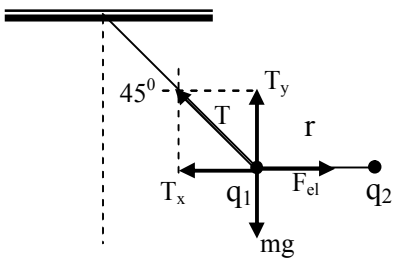
uz zadatak 132

$$F_{rez} = 2*k\frac{3q^2}{a^2} = 9*10^9\frac{6*\left(10^{-6}\right)^2}{(0{,}1)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right] = 5{,}4N.$$



uz zadatak 132

133. $q_1 = 3*10^{-7}$ C; m = 4g; r = 6 cm; q_2 = ?



uz zadatak 133

Za promenu razmatraćemo ugao od 45^0.
Na kuglicu deluju sile: sila zatezanja T, sila Zemljine teže mg, i električna sila F_{el}.
Ako silu zatezanja razložimo na dve komponente T_x i T_y (one su jednake po svojstvima kvadrata $T_x = T_y$) možemo upoređivati sile duž vertikale i horizontale:

$T_y = mg$

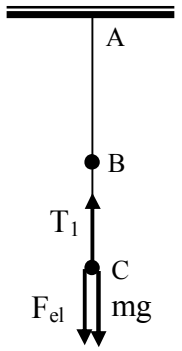
$T_x = F_{el}$ jer se kuglica ne kreće, tj u ravnoteži je. Munjevito zaključujemo da je $\mathbf{mg = F_{el}}$.

$$mg = k\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow q_2 = \frac{mgr^2}{kq_1} = \frac{0{,}004*9{,}81*\left(6*10^{-2}\right)^2}{9*10^9*3*10^{-7}}\left[\frac{kg\,m/s^2*m^2}{Nm^2/C^2*C}\right] = 5{,}2*10^{-8}\,C.$$

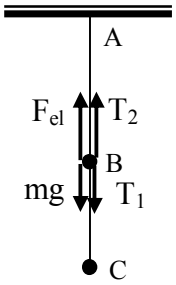
134. m = 0,2 g; r = 3 cm; $q_1 = q_2 = 10*10^{-9}$ C; T = ?

Praktično je izračunati silu Zemljine teže i Kulonovu silu unapred. One su uvek iste samo voditi računa o njihovim smerovima.

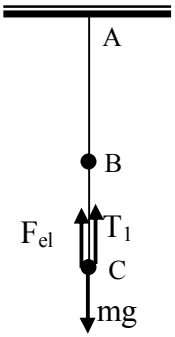
$mg = 0{,}2*10^{-3}$ kg10 m/s^2 = $2*10^{-3}$ N. $F = k\frac{q^2}{r^2} = 9*10^9 \frac{\left(10*10^{-9}\right)^2}{\left(3*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C^2}{m^2}\right] = 1*10^{-3}N.$



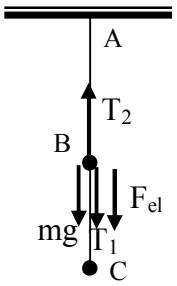
uz zadatak 134-a1



uz zadatak 134-a2



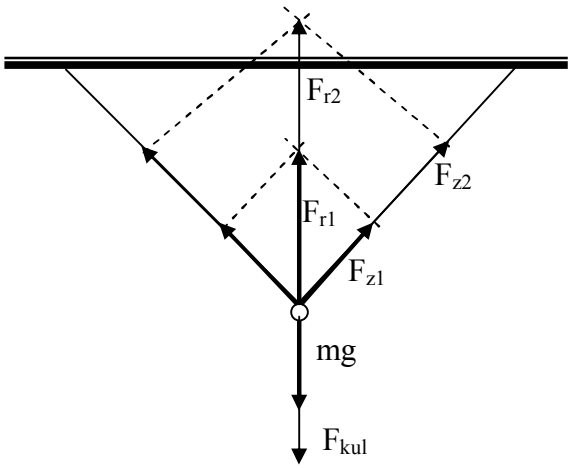
uz zadatak 134-b1



uz zadatak 134-b2

a) Na prvoj slici se vidi da ravnoteža nastupa pod uslovom: $T_1 = mg + F_{el} \Rightarrow$ **$T_1 = 3*10^{-3}$ N.**
Sa druge slike $T_2 + F_{el} = mg + T_1 \Rightarrow T_2 = mg + T_1 - F_{el} \Rightarrow$ **$T_2 = 4*10^{-3}$ N.**
b) Treća slika: $F_{el} + T_1 = mg \Rightarrow T_1 = mg - F_{el} \Rightarrow$ **$T_1 = 1*10^{-3}$ N.**
Četvrta slika: $T_2 = mg + T_1 + F_{el} \Rightarrow$ **$T_2 = 4*10^{-3}$ N.**

135. m = 0,588 g; d = 4,2 cm; q = ?; F_{zat2} = ?



uz zadatak 135

Bez prisustva druge kuglice, ravnoteža je postignuta ako je F_{r1} = mg. Koristeći svojstva kvadrata zaključujemo:
$mg = F_{z1}\sqrt{2}$
U prisustvu druge kuglice deluje još i Kulonova sila:
$mg + F_{kul} = F_{r2}$ opet važi $F_{r2} = F_{z2}\sqrt{2}$
Ako se uzme uslov zadatka:
$F_{r2} = 2F_{z1}\sqrt{2}$ Sa prvom relacijom dobijamo:
$F_{r2} = 2mg$
dalje je $mg + F_{kul} = 2mg$ ili
$F_{kul} = mg$.

$$k\frac{q^2}{d^2} = mg, \quad q = \sqrt{\frac{mgd^2}{k}} \Rightarrow$$

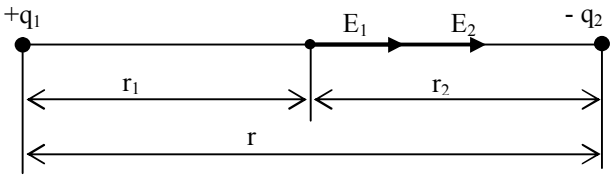
$$q = \sqrt{\frac{0{,}588*10^{-3}*9{,}81*\left(4{,}2*10^{-2}\right)^2}{9*10^9}\left[\frac{kg\,m/s^2}{Nm^2/C^2}\right]}$$

$q = 3{,}36*10^{-8}$ C.

Silu zatezanja možemo naći iz prve relacije: $F_{z1} = \frac{mg}{\sqrt{2}} = 4{,}1*10^{-3}N$ Onda je $F_{z2} = 8.2*10^{-3}$ N.

7.2. Jačina i potencijal električnog polja

136. $q_1 = 10*10^{-6}$ C; $q_2 = -20*10^{-6}$; r = 0,2 m; E_{rez} = ?



uz zadatak 136

Jačine polja traženoj tački iznose (r_1 = 0,1 m):

$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} = 9*10^9\,\frac{10*10^{-6}}{0{,}1^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 90*10^5\,\frac{N}{C}$$

$$E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2} = 9*10^9\,\frac{20*10^{-6}}{0{,}1^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 180*10^5\,\frac{N}{C}$$

Polja imaju isti pravac i smer pa se jačine sabiraju: $E_{rez} = E_1 + E_2 \Rightarrow$ **E_{rez} = 270*10^5 N/C.**

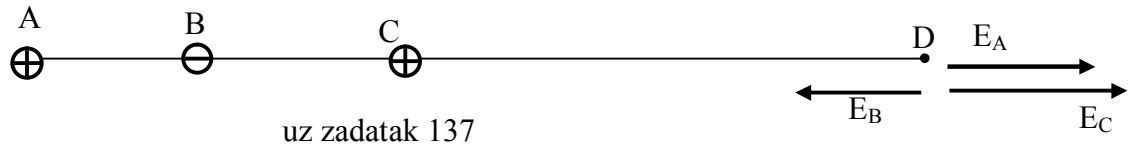
137. q_A = 2 nC; q_B = - 3 nC; q_C = 4 nC; AB = 3 cm; BC = 5 cm; DC = 10 cm; E_D = ?
Ovo je vežba u crtanju smera vektora električnog polja. Smerovi su prikazani na slici.
Izračunaćemo jačine polja od svakog naelektrisanja u tački D: (AD = 18 cm; BD = 13 cm)

$$E_A = k\frac{q_A}{AD^2} = 9*10^9\,\frac{2*10^{-9}}{\left(18*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{N}{m^2}\right] = 555\frac{N}{C}$$

$$E_B = k\frac{q_B}{BD^2} = 9*10^9\,\frac{3*10^{-9}}{\left(13*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{N}{m^2}\right] = 1598\frac{N}{C}$$

$$E_C = k\frac{q_C}{CD^2} = 9*10^9\,\frac{4*10^{-9}}{\left(10*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{N}{m^2}\right] = 3600\frac{N}{C}$$

Rezultujuće polje je:
$E_D = E_A + E_C - E_B$
E_D = 2557 N/C



uz zadatak 137

138. a = 40 cm; q = 5*10^{-9} C; E_{rez} = ?; φ = ?

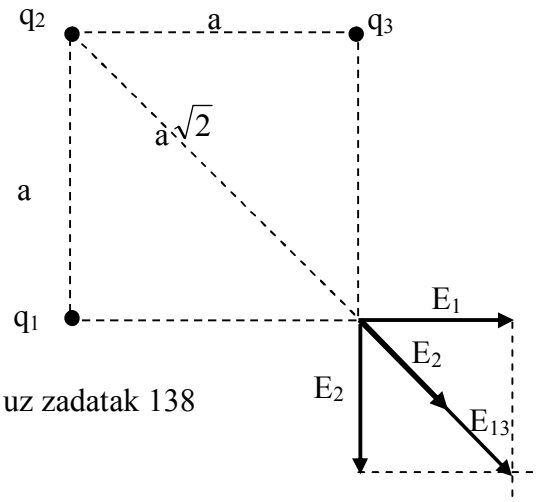
Izračunaćemo jačine polja u četvrtom temenu od svakog naelektrisanja:

$$E_1 = E_2 = k\frac{q}{a^2} = 9*10^9\,\frac{5*10^{-9}}{0{,}3^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 500\frac{N}{C}$$

$$E_2 = k\frac{q}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = 9*10^9\,\frac{5*10^{-9}}{0{,}09*2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 250\frac{N}{C}$$

E_1 i E_3 se sabiraju po Pitagorinoj teoremi:

$$E_{13} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = 500\sqrt{2} = 705\frac{N}{C}$$ **$E_{rez} = E_{13} + E_2$ = 955 N/C**



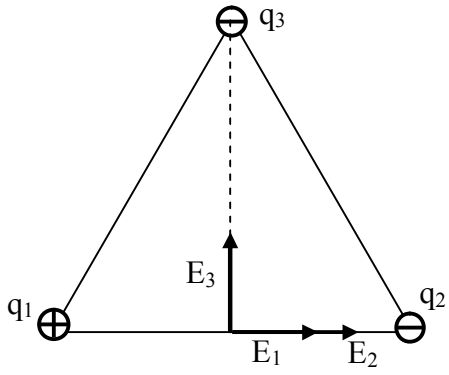
uz zadatak 138

Za potencijale ćemo primeniti sličan postupak, samo postoji bitna razlika. Potencijal je skalarna veličina, što znači da nema pravac i smer. U bilo kojoj tački ukupan potencijal se dobija algebarskim sabiranjem pojedinih potencijala (algebarski znači da se vodi računa o znaku potencijala + ili –)

$$\varphi_{rez} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}} + k\frac{q}{a} = 9*10^9\,\frac{5*10^{-9}}{0{,}3} + 9*10^9\,\frac{5*10^{-9}}{0{,}423} + 9*10^9\,\frac{5*10^{-9}}{0{,}3}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right]$$

φ_{rez} = 406 V. [Nm/C = V]

139. $q_1 = 3$ nC; $q_2 = -4$ nC, $q_3 = -2$ nC; a = 50 cm. E = ?



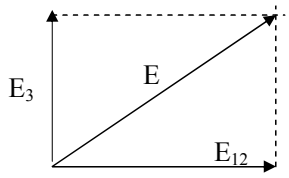
uz zadatak 139

Opet vežba u crtanju smera električnog polja.

$$E_1 = k\frac{q_1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 9*10^9\,\frac{3*10^{-9}}{0{,}25^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 432\frac{N}{C}$$

$$E_2 = k\frac{q_2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 9*10^9\,\frac{4*10^{-9}}{0{,}25^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 576\frac{N}{C}$$

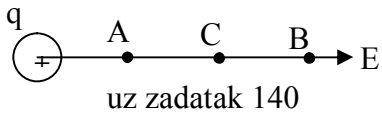
$$E_3 = k\frac{q_3}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 9*10^9\,\frac{2*10^{-9}}{0{,}43^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 97\frac{N}{C}$$



Polja E_1 i E_2 imaju isti pravac i smer pa je njihova rezultanta $E_{12} = E_1 + E_2 = 1008$ N/C.
Polje E_3 je normalno na E_{12} pa se može primeniti Pitagorina teorema.

$$E = \sqrt{E_{12}^2 + E_3^2} = \sqrt{1008^2 + 97^2} = 1012{,}6\frac{N}{C}$$

140. $E_A = 36$ N/C; $E_B = 9$ N/C; $E_C = ?$



uz zadatak 140

Iskoristićemo činjenicu da je jačina polja obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja i da je tačka C na sredini rastojanja A i B.

$E_A = k\frac{q}{r_A^2}$, $E_B = k\frac{q}{r_B^2}$ Ako uporedimo jačine polja:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{k\frac{q}{r_A^2}}{k\frac{q}{r_B^2}} \Rightarrow \frac{36}{9} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \quad \Rightarrow r_B = 2r_A$$ Sada je udaljenost tačke C: $r_C = \frac{r_A + r_B}{2} = 1{,}5r_A$

Opet ćemo uporediti dve tačke, A i C:

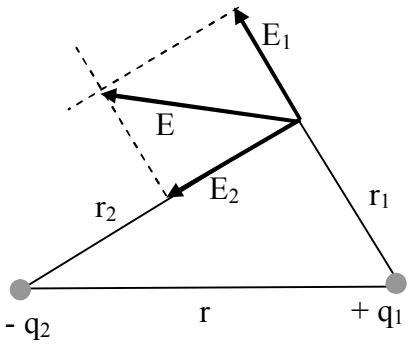
$$\frac{E_C}{E_A} = \frac{r_A^2}{r_C^2} \Rightarrow \frac{E_C}{36} = \frac{r_A^2}{2{,}25r_A^2}$$ Odavde se dobija **E_C = 16 N/C.**

141. $q_1 = 6*10^{-9}$ C; $q_2 = -15*10^{-9}$ C; r = 5 cm; $r_1 = 3$ cm; $r_2 = 4$ cm; E = ? ; φ = ?

Izračunaćemo jačine pola na datim rastojanjima:

$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} = 9*10^9\,\frac{6*10^{-9}}{\left(3*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 6*10^4\,\frac{N}{C}$$

$$E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2} = 9*10^9\,\frac{15*10^{-9}}{\left(4*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 8{,}4*10^4\,\frac{N}{C}$$



uz zadatak 141

Vodite račun o crtanju vektora jačine električnog polja: vektor polazi od pozitivnog naelektrisanja i usmeren je ka negativnom.
Setite se trougla sa stranicanma 3,4,5 – egipatski trougao, to je pravougli trougao pa se može primeniti pitagorina teorema:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(6*10^4\right)^2 + \left(8{,}4*10^4\right)^2}\left[\frac{N}{C}\right]$$ **E = 10,3*10^4 N/C.**

Izračunaćemo i potencijale:

$$\varphi_1 = k\frac{q_1}{r_1} = 9*10^9\,\frac{6*10^{-9}}{3*10^{-2}}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right] = 18*10^2\left[\frac{Nm}{C} = V\right]$$

$$\varphi_2 = k\frac{q_2}{r_2} = 9*10^9\,\frac{-15*10^{-9}}{3*10^{-2}}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right] = -45*10^2\left[\frac{Nm}{C} = V\right]$$

Potencijali su skalarne veličine pa se rezultujući potencijal dobija algebarskim sabiranjem pojedinih:
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 1800 - 4500$ V = - 2700 V.

142. Q_B = - 2 pC; Q_C = 16 pC; Q_D = 5 pC; a = $10\sqrt{3}$ cm; b = 10 cm; E_{rez} = ?

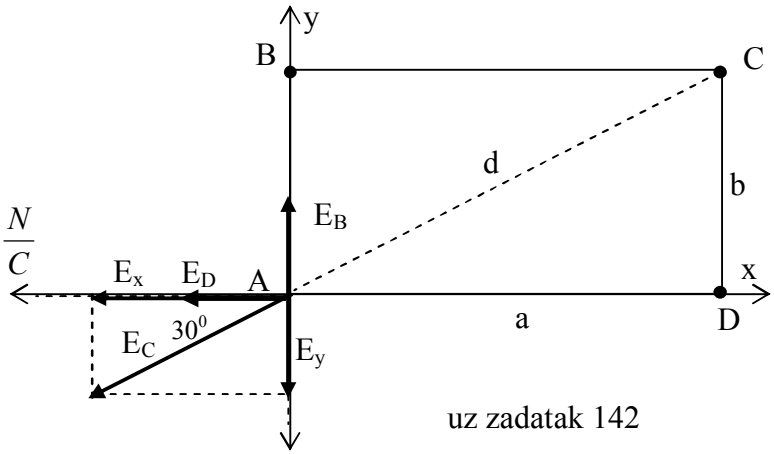
Dijagonala pravougaonika iznosi

$d = \sqrt{a^2 + b^2} = 20\ cm.$ Kako je **b** pola od **d** zaključujemo da je ugao CAD 30^0.

Sada ćemo izračunati jačinu polja od svakog naelektrisanja u tački A:

$$E_D = k\frac{Q_D}{a^2} = 9*10^9\,\frac{5*10^{-12}}{\left(0{,}1\sqrt{3}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = 1{,}5\,\frac{N}{C}$$

$$E_B = k\frac{Q_B}{b^2} = 1{,}8\frac{N}{C},\quad E_C = k\frac{Q_C}{d^2} = 3{,}6\,\frac{N}{C}$$



uz zadatak 142

Ovde su zahtevi složeniji, pa ćemo uvesti koordinatni sistem (x,y) i jačinu polja E_C razložiti na dve komponente, duž x – ose i duž y – ose.
Koristeći svojstva jednakostraničnog trougla lako zaključujemo da je:

$$E_y = \frac{E_C}{2} = 1{,}8\frac{N}{C},\quad E_x = \frac{E_C\sqrt{3}}{2} = 3{,}11\frac{N}{C}$$

Ovde zapažamo da je $E_y = E_B$ i da se ta dva polja poništavaju. Preostaju polja duž x ose:
$E_{rez} = E_x + E_D$ = 3,11 + 1,5 N/C = 4,61 N/C.
Važno je naglasiti da je ukupno rezultujuće polje negativno u odnosu na izabrani koordinatni sistem pa je dobro i napisati **E_{rez} = - 4,61 N/C** (da nam komisija ne bi oduzela 1 bod)
(Onda su i polja E_D i E_y takođe negativna.)

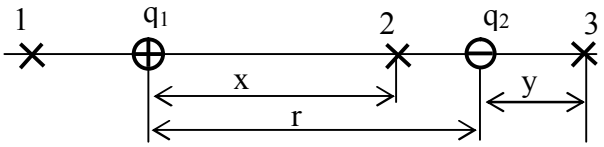
143. q_1 = 10 nC; q_2 = - 1 nC; r = 1,1 m; E = ?

Potencijal može biti nula u više tačaka. Zato treba analizirati mogućnosti. U oblasti gde je tačka 1 potencijal ne može biti nula jer je q_1 veće od q_2 a i veće naelektrisanje je bliže.
U tački 2 potencijal može biti nula ako je

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow k\frac{q_1}{x} = k\frac{q_2}{r-x}$$

$q_1(r - x) = q_2x$

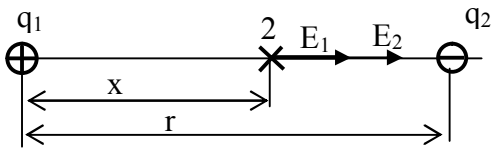
$$x = \frac{q_1 r}{q_1 + q_2} = 1m.$$ jačine polja **u tački 2** su:



uz zadatak 143

$$E_1 = k\frac{q_1}{x^2} = 90\frac{N}{C},\quad E_2 = k\frac{q_2}{(r-x)^2} = 900\frac{N}{C}$$

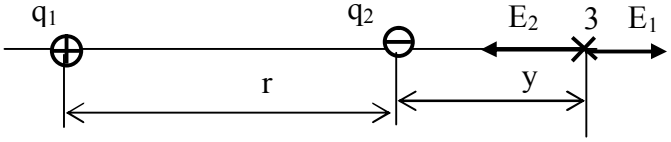
$E_{rez} = E_1 + E_2$= 990 N/C polje je usmereno ka q_2.



uz zadatak 143

Da ispitamo **tačku 3**:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow k\frac{q_1}{r+y} = k\frac{q_2}{y}$$



uz zadatak 143

$q_1 y = q_2(r + y)$ $\quad y = \dfrac{q_2 r}{q_1 - q_2} = \dfrac{1{,}1}{9} = 0{,}122m$

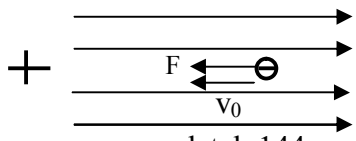
u tački 3 jačine polja su:

$$E_1 = k\frac{q_1}{(r+y)^2} = 60{,}3\frac{N}{C}, \quad E_2 = k\frac{q_2}{y^2} = 605\frac{N}{C}$$

$\mathbf{E_{rez} = E_2 - E_1 = 544{,}7}$ **N/C** polje je usmereno ka q_2.

144. $v_0 = 20$ km/s $= 2*10^4$ m/s; E = 0,003 N/C $= 3*10^{-3}$N/C; s = 10 cm $= 10^{-1}$ m; $m_e = 9{,}1*10^{-31}$ kg; $q_e = 1{,}6*10^{-19}$ C; v = ?; t = ?

Obratiti pažnju: linije sila električnog polja se crtaju od plusa ka minusu a elektron je negativan:
Znači, **ako elektron 'pliva' uz linije sila, kreće se ubrzano!**
Ubrzanje ćemo dobiti iz Drugog Njutnovog zakona.
F = ma, električna sila je $F_e = q_eE$



uz zadatak 144

$$ma = q_eE \Rightarrow a = \frac{q_eE}{m} = \frac{1{,}6*10^{-19}C*3*10^{-3}\,N/C}{9{,}1*10^{-31}kg} = 0{,}53*10^9\,\frac{m}{s^2}$$

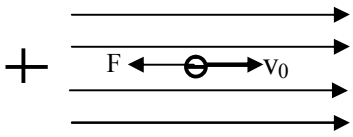
$$v^2 = \sqrt{v_0^2 + 2as} = \sqrt{\left(2*10^4\,m/s\right)^2 + 2*0{,}53*10^9\,m/s^2*10^{-1}m} = 2{,}25*10^4\,\frac{m}{s}.$$

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = 0{,}47*10^{-5}\,s.$$

145. $v_0 = 20$ km/s $= 2*10^4$ m/s; E = 90 N/C; $q_e = 1{,}6*10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1*10^{-31}$ kg.

Elektron se kreće niz linije sila, znači **elektron se kreće usporeno!** Usporenje ćemo izračunati iz Drugog Njutnovog zakona:

$$ma = q_eE \Rightarrow a = \frac{q_eE}{m} = \frac{1{,}6*10^{-19}C*90\,N/C}{9{,}1*10^{-31}kg} = 15{,}8*10^{12}\,\frac{m}{s^2}$$



uz zadatak 145

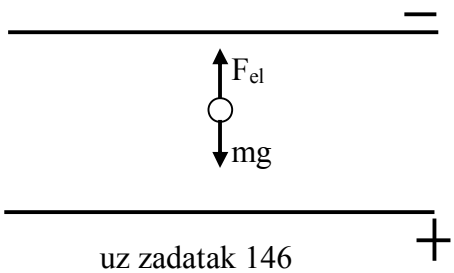
Vreme zaustavljanja je $0 = v_0 - at \Rightarrow$

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{2*10^4}{15{,}8*10^{12}}\left[\frac{m/s}{m/s^2}\right] = 0{,}13*10^{-8}\,s.$$

Put zaustavljanja je:

$$0 = v_o^2 - 2as \;\Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\left(2*10^4\right)}{2*15{,}5*10^{12}}\left[\frac{m^2/s^2}{m/s^2}\right] = 0{,}13*10^{-4}\,m = 0{,}013\,mm$$

146. $q = 8*10^{-8}$ C, U = 300 V, d = 5 mm: V = ?



uz zadatak 146

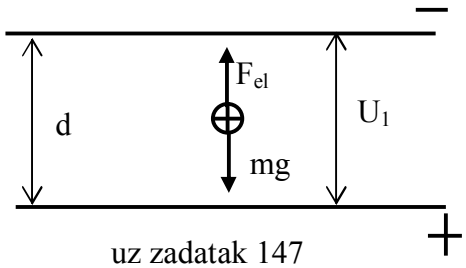
Kuglica je pozitivna jer električna sila deluje uvis.
Električna sila je F = qE
Električno polje je dato relacijom:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{300V}{5*10^{-3}m} = 60*10^3\,\frac{V}{m}$$

Sila je $F = 8*10^{-8}$ C$*60*10^3$ V/m $= 480*10^{-8}$ N.
Da kuglica lebdi treba da je ispunjen uslov: $mg = F_{el}$

ili $\varrho Vg = F_{el} \Rightarrow$ $\quad V = \dfrac{F_{el}}{\rho g} = \dfrac{480*10^{-8}}{900*9{,}81}\left[\dfrac{N}{kg/m^3*m/s^2}\right] = 5{,}44*10^{-10}\;m^3$

147. $U_1 = 80$ V; $U_2 = 100$ V; d = 1 cm; g = 10 m/s^2; t = ?



uz zadatak 147

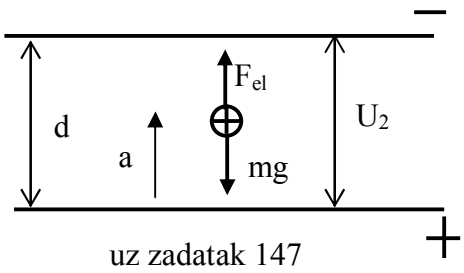
Jačina električnog polja između ploča je:

$$E_1 = \frac{U_1}{d} = \frac{80V}{0{,}01m} = 8000\frac{V}{m}$$ Da bi čestica lebdela uslov je:

$F_{el} = mg$. Ili $\mathbf{qE_1 = mg}$ Ovaj uslov ćemo zapamtiti.

Ako se napon poveća povećaće se i električna sila pa će se čestica kretati ka gornjoj ploči i to ubrzano.

Nova jačina polja je: $E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{100V}{0{,}01m} = 10000\frac{N}{C}$



uz zadatak 147

Jednačina kretanja čestice glasi: (Drugi Njutnov zakon)

$ma = F_{el} - mg$

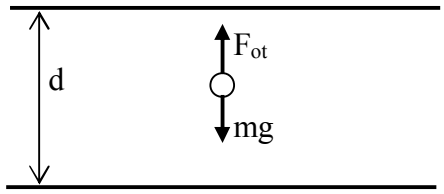
$ma = qE_2 - mg$

Iskoristićemo uslov lebdenja (onaj uslov što smo zapamtili) da eliminišemo q:

$$q = \frac{mg}{E_1} \Rightarrow ma = \frac{mg}{E_1}E_2 - mg \Rightarrow a = g\left(\frac{E_2}{E_1} - 1\right)$$

Brojna vrednost ubrzanja je a = 2,5 m/s^2. Čestica se kreće ubrzano: (čestica kreće sa sredine između ploča) $\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{d}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{0{,}01m}{2{,}5\,m/s^2}} = 0{,}063\,s.$

148. d = 1 cm; $t_1 = 10$ s; U = 980 V; $t_2 = 5$ s; q/m = ?

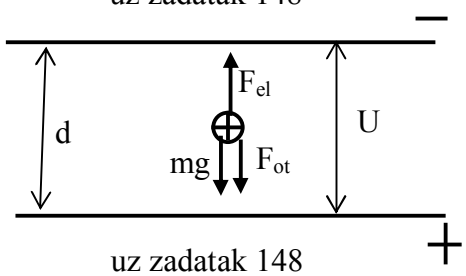


uz zadatak 148

Sila otpora je srazmerna brzini kretanja čestice. $F_{ot} = kv$, gde je k koeficijent srazmernosti.

U prvom slučaju telo pada ravnomerno a = 0, što znači da se sile uravnotežavaju.

$mg = kv_1$. Brzina je $v_1 = d/t_1$ tj. $v_1 = 0{,}001$ m/s. Koeficijent srazmernosti k iznosi $k = \frac{mg}{v_1}$:



uz zadatak 148

Kretanje uvis je takođe ravnomerno pa je brzina $v_2 = d/t_2$, $v_2 = 0{,}002$ m/s.

Ravnoteža sila sada glasi:

$F_{el} = mg + F_{ot}$

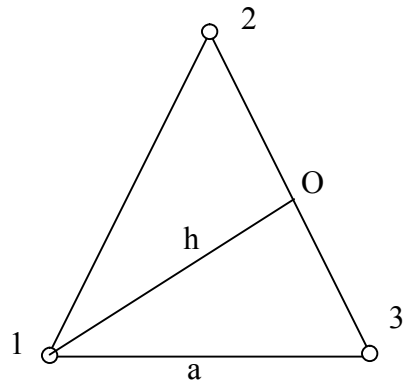
$F_{el} = qE$, gde je jačina polja: E = U/d = 98000 N/C.

$qE = mg + kv_2$ (sad je brzina v_2) Ako zamenimo k iz gornje relacije:

$$qE = mg + \frac{mg}{v_1}v_2 \Rightarrow qE = mg\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)$$ Konačno dobijamo $$\frac{q}{m} = \frac{g}{E}\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)$$

Ako zamenimo brojne vrednosti (g je sigurno 9,8 – pogodite zašto) $\Rightarrow \frac{q}{m} = 0{,}0004\frac{C}{kg}$

149. $q_1 = 4$ nC; φ = ?



uz zadatak 149

Kada god se dve kuglice spoje ukupno naelektrisanje se podeli na dva jednaka dela, jer su kuglice jednake.

Znači posle prvog spajanja (1 i 2) prva kuglica daje drugoj polovinu svog naelektrisanja.

Stanje je $q_1' = \frac{q_1}{2};\ q_2' = \frac{q_1}{2};\ q_3 = 0.$

Posle drugog spajanja (2 i 3) druga kuglica daje polovinu kuglici 3 pa je stanje:

$q_1'' = \frac{q_1}{2};\ q_2'' = \frac{q_1}{4};\ q_3'' = \frac{q_1}{4}$

Na kraju se spoje 1 i 3 pa se njihovo ukupno naelektrisanje preraspodeli po pola: $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):2=\frac{3}{8}$

Konačno stanje je: $q_1''' = \frac{3q_1}{8};\ q_2''' = \frac{q_1}{4};\ q_3''' = \frac{3q_1}{8}$

Potencijali u tački O su:

$$\varphi_1 = k\frac{\frac{3q_1}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = k\frac{6q_1}{8a\sqrt{3}} = 9*10^9\frac{6*4*10^{-9}}{8*0{,}1*1{,}73}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right] = 156\left[\frac{Nm}{C}=V\right]$$

nismo zaboravili $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\varphi_2 = k\frac{\frac{q_1}{4}}{\frac{a}{2}} = k\frac{q_1}{2a} = 180V;\quad \varphi_3 = k\frac{\frac{3q_1}{8}}{\frac{a}{2}} = k\frac{6q_1}{8a}$$

Ukupan potencijal u tački O je **$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 606V$**

150. $\varphi_1 = 450$ V; $\varphi_2 = 475$ V; $e = 1{,}6*10^{-19}$ C; $m = 9{,}1*10^{-19}$ kg; $v_1 = 190$ m/s; $v_2 = ?$

Elektron je negativan i ide u oblast višeg potencijala – ka sve pozitivnijoj tački. Znači da elektron povećava brzinu. (Druga situacija bi bila da je u pitanju proton koji je pozitivan)

Brzina se povećava na račun rada električnih sila. Po definiciji je **A = eU.** Znači:

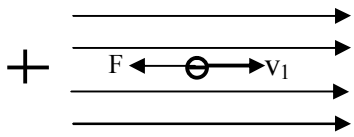
$A = 1{,}6*10^{-19}$ C$*(475 - 450)$V $= 40*10^{-19}$J.

Taj rad ide na povećanje kinetičke energije:

$E_{k2} - E_{k1} = A$ dalje je

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2A}{m}} \approx 3*10^6\frac{m}{s}$$

151. $v_1 = 3*10^6$ m/s; U = 25 V; $m = 9{,}1*10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6*10^{-19}$ C; $v_2 = ?$



uz zadatak 151

Kretanje elektrona je prikazano na slici. Elektron se kreće usporeno i kinetička energija se smanjuje. Rad električnih sila je A = eU.

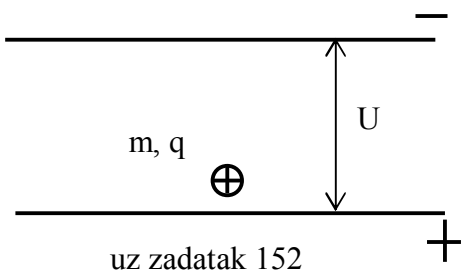
$A = 1{,}6*10^{-19}*25$[CV] $= 40*10^{-19}$ J.

Taj rad ide na smanjenje potencijalne energije.

$E_{k1} - E_{k2} = A$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = A \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2A}{m}} \approx 1*10^6\frac{m}{s}$$

152. $m = 2*10^{-4}$ kg; $q = 3*10^{-6}$ C; $v_0 = 0$ m/s; U = 100V; v = ?



uz zadatak 152

Rad električnih sila se troši na povećanje kinetičke i potencijalne energije.

$A = E_k + E_p$ Po uslovu zadatka je $E_p = \frac{1}{3}E_k$

$$A = \frac{4}{3}E_k,\ \Rightarrow qU = \frac{4}{3}\frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3qU}{2m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3*3*10^{-6}}{2*2*10^{-4}}\frac{CV}{kg}} = 0{,}15\frac{m}{s}.$$

153. $U = 10$ V; $m_\alpha = 4m_p$; $q_\alpha = 2q_p$; $t = 1$ μs; $s_p/s_\alpha = ?$

Kada se proton i alfa čestica ubrzaju naponom, dalje će se kretati ravnomerno jer ulaze u prostor bez polja. Brzine se izračunavaju iz jednakosti rada električnih sila i kinetičkih energija $A = E_k$.

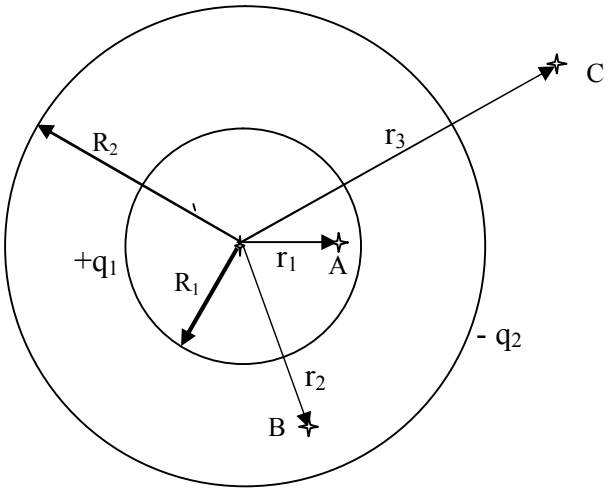
$$q_p U = \frac{m_p v_p^2}{2} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2q_p U}{m_p}};\ v_\alpha = \sqrt{\frac{2q_\alpha U}{m_\alpha}},$$

putevi su: $s_p = v_p t$; $s_\alpha = v_\alpha t$; odnos puteva je

$$\frac{s_p}{s_\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2q_p U}{m_p}}}{\sqrt{\frac{2q_\alpha U}{m_\alpha}}} = \sqrt{\frac{q_p m_\alpha}{q_\alpha m_p}} = \sqrt{\frac{q_p * 4m_p}{2q_p * m_p}} = \sqrt{2}$$

Kao komentar treba dodati da ne treba žuriti sa izračunavanjem brojnih vrednosti. Vidimo da se većina veličina skratila. Konkretno izračunavanje puteva bi bio zamašan posao! (mada su dati podaci)

154. $R_1 = 6$ cm; $R_2 = 10$ cm; $q_1 = 1*10^{-9}$ C; $q_2 = -0{,}5*10^{-9}$ C; $r_1 = 5$ cm; $r_2 = 9$ cm; $r_3 = 15$ cm; $E_1 = ?$; $E_2 = ?$; $E_3 = ?$



Jačina polja u svakoj tački jednaka je zbiru jačina polja od oba naelektrisanja, vodeći računa o smeru i pravcu. Jačina polja u tački A je nula $\mathbf{E_A = 0}$. Jačina polja u unutrašnjosti metala je nula! Sfere čine Faradejev kavez. U tački B polje potiče samo od q_1 (od q_2 je i dalje u kavezu!)

$$E_B = k\frac{q_1}{r_2^2} = 9*10^9 \frac{1*10^{-9}}{\left(9*10^{-2}\right)^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = \frac{1}{9}10^4\frac{N}{C}$$

U tački C polje potiče od oba naelektrisanja (izašli smo iz kaveza). Polja u toj tački će se oduzimati zbog suprotnih naelektrisanja:

$$E_{C1} = k\frac{q_1}{r_3^2};\quad E_{C2} = k\frac{q_2}{r_3^2} \qquad \mathbf{E_C = E_{C1} - E_{C2}}$$

$$E_C = k\frac{q_1 - q_2}{r_3^2} = 200\frac{N}{C}$$

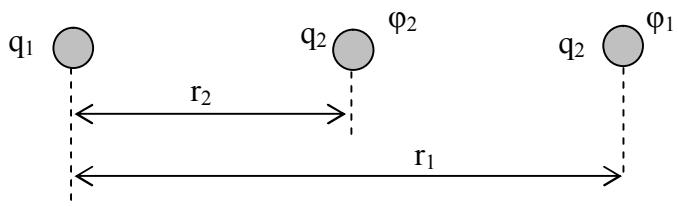
155. $q_1 = 2*10^{-6}$ C; $q_2 = 3*10^{-6}$ C; $r_1 = 0{,}6$ m; $r_2 = 0{,}3$ m; $A = ?$

Računaćemo da je jedno naelektrisanje nepokretno a drugo mu se približava. Rad u električnom polju je dat izrazom $A = q_2(\varphi_1 - \varphi_2)$; (q_2 se pomera u polju prvog)

$$A = q_2\left(k\frac{q_1}{r_1} - k\frac{q_1}{r_2}\right) \Rightarrow A = 3*10^{-6}C\left(9*10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{2*10^{-6}C}{0{,}6m} - 9*10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{2*10^{-6}C}{0{,}3m}\right)$$

$$A = 3*10^{-6}C\left(30*10^3V - 60*10^3V\right) = -90*10^{-3}J.$$

Rad je negativan jer se vrši protiv električnih sila. Naelektrisanja su istoimena, a približavaju se, znači mora da deluje neka spoljašnja sila.
Očigledno je da bi isti rezultat dobili da smo fiksirali q_2 a pomerali q_1.
Ako bi naelektrisanja bila raznoimena rad bi bio u ovom slučaju pozitivan, što znači da električne sile vrše rad.
To je i razlog što se napon definiše kao $\varphi_1 - \varphi_2$ a ne $\varphi_2 - \varphi_1$.



uz zadatak 155

156. $F_g = 3$ N; $q = 2*10^{-6}$ C; $\varrho = 2700$ kg/m^3; $\varphi_1 - \varphi_2 = ?$

Opet gradivo koje nije (još) rađeno. Očigledno da je data formula za zapreminu lopte da bi se izračunao poluprečnik lopte. Težina lopte je data po Drugom Njutnovom zakonu: $F_g = mg$

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{3N}{9{,}81 m/s^2} \approx 0{,}3kg; \quad V = \frac{m}{\rho} = \frac{0{,}3kg}{2700 kg/m^3} \approx 0{,}000111 m^3$$

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0{,}03m$$

Obratite pažnju da je sa R obeležen poluprečnik (a ne prečnik)

Potencijal na površini sfere i na udaljenosti 2R od centra sfere iznosi:

$$\varphi_1 = k\frac{q}{R} = 9*10^9 \frac{2*10^{-6}}{0{,}03}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right] = 600*10^3 V; \quad \varphi_2 = k\frac{q}{2R} = 300*10^3 V.$$

Razlika potencijala je $\boldsymbol{\varphi_1 - \varphi_2 = 300*10^3}$ **V.**

157. h = 0,5 m; H = 2 m; m = 0,002 g; $q = 10^{-9}$ C; E = ?; v = ?

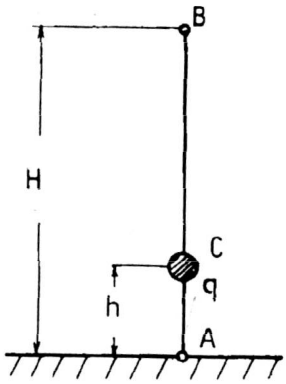
Čestica dobija energiju na račun rada električnih sila na putu h: $A = F*h = qE*h$

Usled ovog rada čestica stiče kinetičku i potencijalnu energiju.

U najvišoj tački B sav rad se pretvorio u potencijalnu energiju mgH.

Odatle izračunavamo E:

$qE*h = mgH \qquad E = \frac{mgH}{qh} = \frac{2*10^{-6}*9{,}81}{10^{-9}*0{,}5}\left[\frac{kg\,m/s^2 m}{Cm}\right] \approx 7{,}8*10^4 \frac{N}{C}$



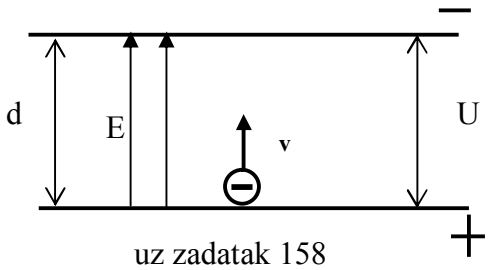
uz zadatak 157

Vratimo se u tačku C, gde se traži brzina čestice. Zakon održanja energije za tu tačku glasi:

$qE*h = \frac{mv^2}{2} + mgh$ Odavde se može odmah izračunati v, ali možemo upotrebiti relaciju iz tačke B:

$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh \Rightarrow v = \sqrt{2g(H-h)} = 5{,}4\frac{m}{s}$. Kod hica uvis kretanje je simetrično, ovoliku brzinu bi imala čestica u tački C da je slobodno pala sa visine H. (Provera rezultata)

158. $v = 8*10^5$ m/s; U = 5 V; d = 0,1 m; $m = 9{,}1*10^{-19}$ C; $e = 1{,}6*10^{-19}$ C; x = ?



uz zadatak 158

Elektron se kreće dok ne utroši svu svoju kinetičku energiju na rad protiv električnih sila. Za to je potreban napon (razlika potencijala):

$$\frac{mv^2}{2} = eU_x \Rightarrow U_x = \frac{mv^2}{2e} = \frac{9{,}1*10^{-19}kg*\left(8*10^5 m/s\right)^2}{2*1{,}6*10^{-19}C} = 1{,}82\ V.$$

Jačina polja je ista u svakoj tački unutar kondenzatora (polje u kondenzatoru je homogeno):

$E = \frac{U}{d} = \frac{5V}{0{,}1m} = 50\frac{V}{m}$ Onda je i $E = \frac{U_x}{x} \Rightarrow x = \frac{U_x}{E} \Rightarrow x = 0{,}036m.$

Ovde treba objasniti zašto nismo uzeli u obzir silu Zemljine teže koja svakako deluje na elektron?

Da izračunamo: električna sila u ovom slučaju iznosi: $\mathbf{F_e}$ = eE = $1{,}6*10^{-19}$C*50N/m = $\mathbf{80*10^{-19}}$ **N.**

Sila Zemljine teže je: $\mathbf{F_g}$ = mg = $9{,}1*10^{-31}$kg*9,81m/s^2 = $\mathbf{89*10^{-31}}$**N.**

Ako napravimo količnik vidimo da je **električna sila jača milion miliona puta! (10^{12})**

159. d = 2 mm = $2*10^{-3}$ m; S = 150 cm^2 = $1,5*10^{-2}$ m^2; $\varepsilon_0 = 8,85*10^{-12}$ C^2/Nm^2; $\varepsilon_r = 7$; C_0 = ?; C = ?

a) kapacitet pločastog kondenzatora sa vazduhom između je ($\varepsilon_r \approx 1$): $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$

$$C_0 = 8,85*10^{-12}\frac{1,5*10^{-2}}{2*10^{-3}}\left[\frac{C^2}{Nm^2}\frac{m^2}{m}\right] = 6,64*10^{-11}\left[\frac{C^2}{Nm}\right] = 66,4*10^{-12}\left[\frac{C^2}{J} = \frac{C^2}{CV} = \frac{C}{V} = F\right]$$

Korisno je vežbati sređivanje jedinica. Nm = J (iz relacije A = F*s); dalje je J = CV (iz relacije A = qU)

Na kraju se upotrebi definicija kapaciteta: $C = \frac{q}{U}\left[\frac{C}{V} = F\right]$

b) Sa dielektrikom (izolatorom) između, kapacitet se povećava: $C = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_0$

C = $7*66,4*10^{-12}$ = $464,8*10^{-12}$ F = 464,8 pF.

160. Krenućemo od definicije kapaciteta i potencijala kugle.

$C = \frac{q}{\varphi}$, $\varphi = k\frac{q}{r}$ Zamenom dobijamo $C = \frac{r}{k}$ Poupreč nik kugle je

$r = kC = 9*10^9 *1\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{V} = m\right]$ Znači poluprečnik kugle je **r = $9*10^9$ m!**

Poluprečnik Zemlje je $r_z = 6,4*10^6$ m; pa uporedite.

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi}}$$

161. Ako se provodnici spoje njihovi potencijali su isti!
Dalje čemo iskoristiti zakon održanja količine elektriciteta:
Ukupna količina elektriciteta u izolovanom sistemu je stalna.
Izolovanost znači da je sistem odvojen od okoline.
U našem slučaju sistem su ova dva provodnika, a i izolovani su pošto u zadatku ne postoji ništa osim njih.
Pre spajanja količine maelektrisanja na provodnicima su; $q_1 = C_1\varphi_1$; $q_2 = C_2\varphi_2$ (pogledati gore desno)
Posle spajanja: $q_1' = C_1\varphi$; $q_2' = C_2\varphi$ (potencijali su isti!)
Zakon održanja naelektrisanja kaže da je količina elektriciteta pre spajanja jednaka je količini elektriciteta posle spajanja:
$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$ ili

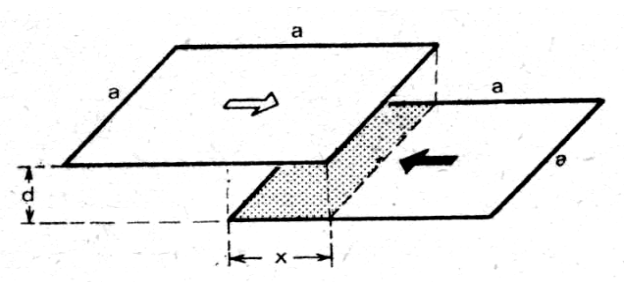
$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = C_1\varphi + C_2\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}$

Ako bi provodnici bili kugle, pogledati prethodni zadatak, $\varphi = \frac{r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2}{r_1 + r_2}$

162. a = 10 cm; d = 5 cm, v = 0,1 mm/s; C = ?
Pre preklapanja ploča kapacitet je nula. U površinu u formuli za kapacitet računa se samo površina koja se preklapa! Znači **S = ax; x = vt**

$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \frac{ax}{d} = \varepsilon_0 \frac{avt}{d}$ maksimalni kapacitet će biti kada se ploče potpuno preklope: x = a

$$C_{max} = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} = 8,85*10^{-12}\frac{0,1^2}{0,05}[F] = 1,77*10^{-12}F$$



uz zadatak 162

To će se desiti posle $t = \frac{a}{v} = \frac{100mm}{0,1mm/s} = 1000s$. Posle još 1000 s, preklapanje prestaje i opet je C = 0

163. $U_1 = 200$ V; $d_1 = 5$ cm; $d_2 = 10$ cm; $U_2 = ?$; $E_1 = ?$; $E_2 = ?$

Važno je zapaziti da je kondenzator usamljen, bez kontakta sa izvorom. Zato važi zakon održanja količine elektriciteta: (količina pre razmicanja je jednaka količini posle razmicanja)
$q_1 = q_2$ ili $C_1U_1 = C_2U_2$ ako se zameni izraz za kapacitet:

$$\boxed{C = \frac{q}{U}}$$

$$\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} U_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_2} U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{d_2 U_1}{d_1} \Rightarrow U_2 = \frac{10cm * 200V}{5cm} = 400V.$$

$E_1 = \frac{U_1}{d_1}$; $E_2 = \frac{U_2}{d_2}$ Očigledno jačina polja ostaje ista.

164. $C = 20$ nF; $U = 100$V; $A = ?$
Opet nešto novo – što nije u programu – energija kondenzatora. Upotrebljeno je slovo W jer je E zauzeto.
Plan je sledeći: Rad je mera za promenu energije:
$A = \Delta W$ tj, $A = W_2 - W_1$
Pod datim uslovima kapacitet će se smanjiti dva puta a napon povećati dva puta. (Slično kao u prethodnom zadatku). Ipak to možemo dokazati:

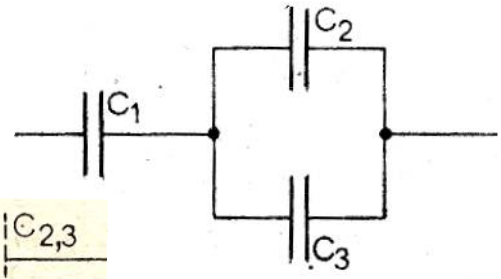
$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d};\ C' = \varepsilon_0 \frac{S}{2d} \Rightarrow C' = \frac{C}{2}$$

Iz zakona održanja količine elektriciteta : $q_1 = q_2$ ili $CU = C'U' \Rightarrow U' = 2U$
Energije kondenzatora su:

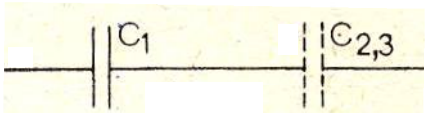
$$W_1 = \frac{1}{2}CU^2;\quad W_2 = \frac{1}{2}C'U'^2 = \frac{1}{2}\frac{C}{2}(2U)^2 = CU^2$$

Razlika je $W = \frac{1}{2}CU^2;\quad W = \frac{1}{2}20 * 10^{-9} F(100V)^2 = 10^{-4} J.$

165. $C_1 = 200\ \mu F$, $C_2 = 100\ \mu F$, $C_3 = 300\ \mu F$; $C_e = ?$
Treba ova tri kondenzatora zameniti jednim – ekvivalentnim kondenzatorom.
Prvo, očigledno je da su C_2 i C_3 vezani paralelno:
$C_{2,3} = C_2 + C_3 = 400\mu F$.
Sada dobijamo šemu:
Ova dva kondenzatora su vezani redno.
Koristićemo skraćenu formulu koja važi za dva redno vezana kondenzatora:



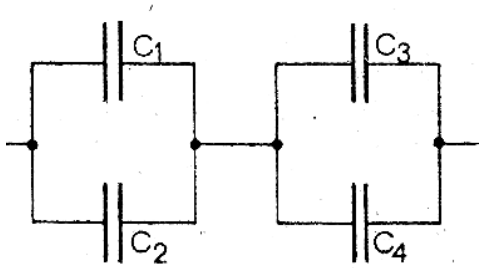
uz zadatak 165



uz zadatak 165

$$C_e = \frac{C_1 * C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}} = \frac{200 * 400}{600}[\mu F] = 133\mu F$$

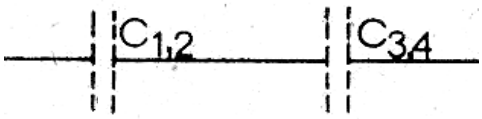
166. $C_1 = C_2 = 100$ pF; $C_3 = C_4 = 200$ pF; $C_e = ?$



uz zadatak 166

C_1 i C_2 su vezani paralelno, isto tako i C_3 i C_4:
$C_{1,2} = C_1 + C_2 = 200$ pF,
$C_{3,4} = C_3 + C_4 = 400$ pF. Dobijamo dva redno vezana kondenzatora:
Sada primenjujemo formula:

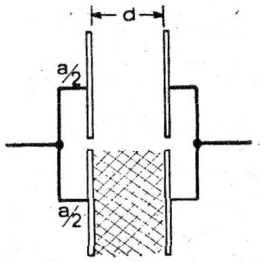
$$C_e = \frac{C_{1,2} * C_{3,4}}{C_{1,2} + C_{3,4}} = 133\ pF$$



uz zadatak 166

167. Pogledajte rezultate pa proverite svoj rad.

168. A 10 cm; d = 4 mm; $\varepsilon_r = 81$; $C_e = ?$

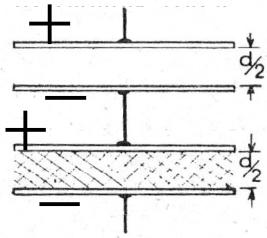


a) U prvom slučaju ako zamislimo da rasečemo ploče kao na slici i razmaknemo, ali ostavimo povezane kao što su i bile dobijamo dva paralelno povezana kondenzatora

Površina ploča je S = a∗a/2, a kapaciteti:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \frac{a^2}{2d}; \quad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a^2}{2d}$$ Njihov zbir daje: $$C_e = \varepsilon_0 \frac{a^2}{2d}(1+\varepsilon_r)$$

Zamenom se dobija **C_e = 907 pF.**



uz zadatak 168 b

b) U drugom slučaju zamislimo da između ploča duž površine vode postavimo tanak listić metala, gornja ploča će privući negativna naelektrisanja u metalu, a do donje ploče ostaće pozitivna. Zatim listić rascepimo po dužini i dobijamo situaciju kao na slici (listići su povezani), dva redno vezana kondenzatora, sa rastojanjem između ploča d/2:

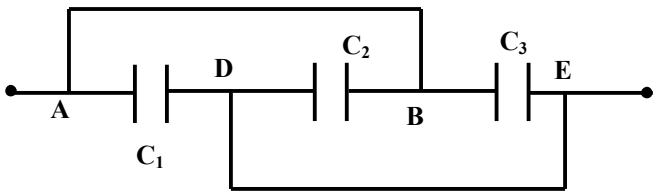
$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{a^2}{\frac{d}{2}} = \varepsilon_0 \frac{2a^2}{d}; \quad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2a^2}{d}$$ Redna veza: $$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_e = \frac{\varepsilon_0 \frac{2a^2}{d} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2a^2}{d}}{\varepsilon_0 \frac{2a^2}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2a^2}{d}} \qquad C_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \frac{2a^2}{d}$$ zamenom se dobija **C_e = 43,7 pF.**

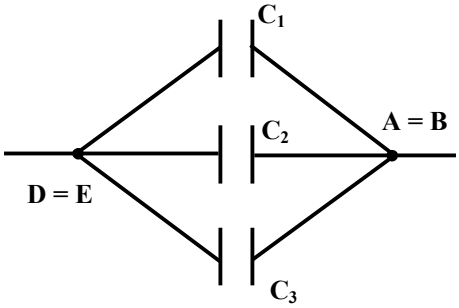
169. Malo neobična šema, koja se često javlja u zadacima. Treba uočiti provodnike bez kondenzatora. To znači da su tačke koje one spajaju **na istom potencijalu** i **te tačke se mogu spojiti**. Obeležićemo ih slovima da bi ih lakše uočili.

Pogledajte sliku 169 – 1. Zamislite da tačku **A** prebacimo u tačku **B;** A tačku **E** prebacimu u tačku **D**. Tako dolazimo do slike 169 – 2. Očigledno je da su sva tri kondenzatora paralelno vezana.

$C_e = C_1 + C_2 + C_3$



uz zadatak 169 – 1



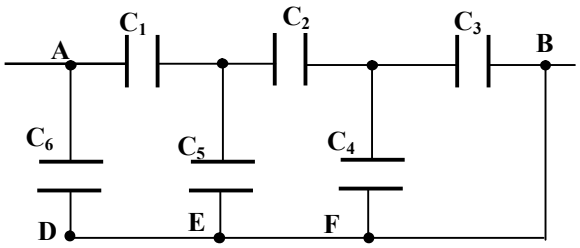
uz zadatak 169 – 2

170. $C_1 = 4\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$, $C_4 = 4\ \mu F$, $C_5 = 1{,}6\ \mu F$, $C_6 = 2\ \mu F$, $C_e = ?$

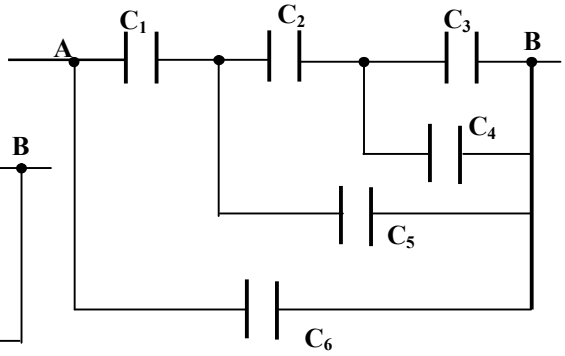
Treba zapaziti da su tačke D, E, F i B na istom potencijalu – vezani su provodnikom a nema nikakvog elementa između njih. Zamislite da tačke D, E, i F preslikamo u tačku B.

Tako dolazimo do slike 170 – 2.

Dalji rad prepuštam vama.



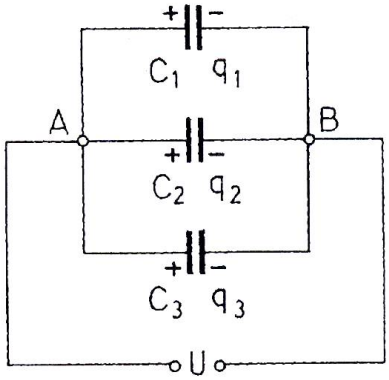
uz zadatak 170 – 1



uz zadatak 170 – 2

C_3 i C_4 su vezani paralelno, pa redno sa C_2 pa svi oni paralelno sa C_5 itd.

171. $C_1 = 2\ \mu F$; $C_2 = 3\mu F$; $C_3 = 6\ \mu F$; $U = 110$ V; $C_e = ?$, $q = ?$ $q_i = ?$



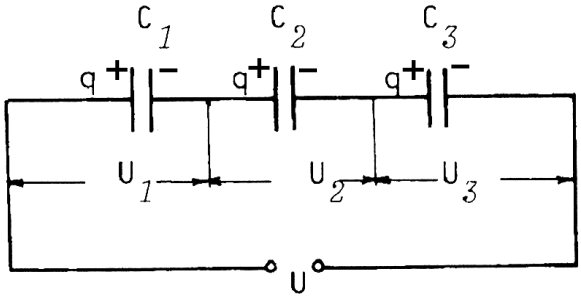
uz zadatak 171

Ekvivalentni kapacitet je $C_e = C_1 + C_2 + C_3 =$ **11 μF.**
Napon je isti za sve kondenzatore kod paralelne veze. Pojedinačne količine elektriciteta dobijamo iz definicije kapaciteta:

$$C = \frac{q}{U} \qquad q_1 = C_1U = 2\ \mu F * 110\ V = \mathbf{220\ \mu C},$$

$q_2 = C_2U = 3\mu F * 110$ V = **330 μC,**
$q_3 = C_3U = 6\ \mu F * 110$ V = **660 μC**.
Ukupna količina elektriciteta je jednaka zbiru pojedinih količina:
$q = q_1 + q_2 + q_3$ = **1210 μC.**
Ukupnu količinu elektriciteta smo mogli izračunati i koristeći ekvivalentni kapacitet.
$q = C_eU = 11\ \mu F * 110$ V = **1210 μC.**

172. $C_1 = 2\ \mu F$; $C_2 = 3\mu F$; $C_3 = 6\ \mu F$; $U = 110$ V; $C_e = ?$, $q = ?$ $q_i = ?$



uz zadatak 172

Treba izračunati ekvivalentni kapacitet jer je dat napon na celoj vezi:

$$\frac{1}{Ce} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow \frac{1}{C_e} = \frac{1}{2\mu F} + \frac{1}{3\mu F} + \frac{1}{6\mu F} \Rightarrow C_e = 1\mu F$$

Ukupna količina elektriciteta je
$q_e = C_eU = 1\ \mu F * 110$ = **110 μC**
Kod redne veze pojedinačne količine elektriciteta jednake su ukupnoj količini!
U ovo se možemo uveriti gledajući raspored pluseva i minusa na slici 172. Na kraju preostaje plus na prvoj ploči prvog kondenzatora i minus na drugoj ploči poslednjeg kondenzatora – ostale ploče daju zbir naelektrisanja nula.
$q_e = q_1 = q_2 = q_3 = 110\ \mu C$
Naponi na pojedinim kondenzatorima iznose:

$$U_1 = \frac{q_e}{C_1} = \frac{110\mu C}{2\mu F} = 55\ V;\ U_2 = \frac{q_e}{C_2} = \frac{110\mu C}{3\mu F} = 36{,}7V; U_3 = \frac{q_e}{C_3} = \frac{110\mu C}{6\mu F} = 18{,}3V$$

Provera $U = U_1 + U_2 + U_3 = 110$ V.

173. $C_1 = 0{,}3\ \mu F$; $C_2 = 0{,}2\ \mu F$; $U_1 = 50$ V; $U_2 = 40$ V; $U' = ?$

Ono što povezuje kondenzatore pre i posle spajanja je zakon održana količine elektriciteta.
Zato ćemo izračunati količinu elektriciteta na svakom kondenzatoru:
$q_1 = C_1U_1 = 15\ \mu C$; $q_2 = C_2U_2 = 8\ \mu C$.
ako se spoje ploče istih znakova (+ i +) ukupna količina elektriciteta je $q_1 + q_2 = 23\ \mu C = q_e$
To predstavlja ukupnu količinu elektriciteta i za paralelnu vezu.
$C_e = C_1 + C_2 = 0{,}5\ \mu F$. Za paralelnu vezu napon je isti na oba kondenzatora:

$$U' = \frac{q_e}{C_e} = \frac{23\mu C}{0{,}5\mu F} = 46V.$$

Naelektrisanje bi se podelilo ovako: $q_1 = C_1U' = 0{,}3\mu F * 46V = 13{,}8\ \mu C$, $q_2 = C_2U' = 9{,}2\ \mu C$. ($q_e = 23\ \mu C$)
Drugi slučaj dobijamo ako spojimo + i – :
$q_e = q_1 - q_2 = 7\ \mu C$. Napon je sada:

$$U'' = \frac{q_e}{C_e} = \frac{7\mu C}{0{,}5\mu F} = 14V.$$ Raspodelu količina elekticiteta nađite sami.

174. $C_1 = 6\ \mu F$; $U_1 = 400\ V$; $C_2 = 10\ \mu F$; $U' = ?$; $q' = ?$ $q'' = ?$

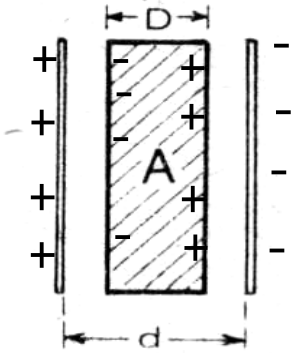
Količina elektriciteta pre spajanja iznosi: $q_1 = C_1U_1 = 6\ \mu F * 400\ V = 2400\ \mu C = 24*10^{-4}\ C$. Ova količina elektriciteta se raspodeljuje na paralelnu vezu.
Ekvivalentni kapacitet paralelne veze je $C_e = C_1 + C_2$ tj. $C_e = 16\ \mu F$.
Na njima je elekticitet $q_e = q_1$ (Zakon održanja količine elektriciteta)

Napon paralelne veze: $U' = \dfrac{q_e}{C_e} = \dfrac{2400\mu C}{16\mu F} = 150V.$

Napon je isti za oba kondenzatora pa su pojedinačne količine elektriciteta:
$q' = C_1U' = 6*10^{-6}\ C*150\ V = 9*10^{-4}\ C$
$q'' = C_2U' = 10*10^{-6}C*150\ V = 15*10^{-4}\ C$. (Ili $q''= q_e - q'$)

175. $d = 100\ cm$; $a = 100\ cm$; $C_1 = ?$; $C_2 = ?$
Kapacitet pločastog kondenzatora iznosi – površina ploča je $S = a^2$:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \Rightarrow C_1 = 8{,}85*10^{-12}\frac{1^2}{1}\left[\frac{C^2}{Nm^2}\frac{m^2}{m}\right] = 8{,}85*10^{-12}F$$



uz zadatak 175

U drugom slučaju dolazi do preraspodele naelektrisanja u metalu, elektroni se poređaju naspram pozitivne ploče, a naspram negativne ploče ostane pozitivno. Vidimo da su se formirala dva kondenzatora, redno vezana. (unutrašnjost metala ne može biti kondenzator jer je provodna).

Rastojanje između ploča novog kondenzatora je $d_1 = \dfrac{d-D}{2} = \dfrac{a}{4} = 25\,cm.$

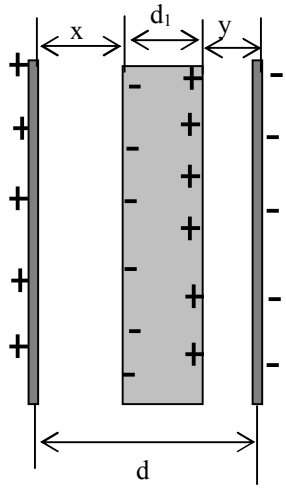
Površine ostaju $S = a^2$.

$$C' = \varepsilon_0 \frac{a^2}{\frac{a}{4}} = 35{,}4*10^{-12}F \qquad C_e = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = 17{,}7*10^{-12}F.$$

176. Na staklenoj ploči, usled uticaja ploča kondenzatora, dolazi do pojave naelektrisanja kao na slici. Ali sada je situacija bitno drugačija u odnosu na prethodni zadatak, jer imamo **tri** kondenzatora redno vezana.
Sada i staklena ploča predstavlja kondenzator jer je izolator.
Zapaziti da nije dato gde je staklena ploča stavljena – na kojoj udaljenosti od ploča kondenzatora – pa moramo pretpostaviti najopštiji slučaj, da je udaljena za x.
Zapaziti da je $y = d - x - d_1$.
Kapacitet pre stavljanja staklene ploče:

$C_0 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ posle stavljanja ploče od stakla:

$C_1 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{x}$; $C_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r \dfrac{S}{d_1}$; $C_3 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d-x-d_1}$ Ukupan kapacitet redne veza je dat



uz zadatak 176

izrazom: $\dfrac{1}{C_e} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}$ Zamenom gornjih izraza:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} + \frac{d-x-d_1}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow \frac{1}{C_e} = \frac{\varepsilon_r x + d_1 + \varepsilon_r(d-x-d_1)}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} \Rightarrow C_e = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d_1 + \varepsilon_r(d-d1)}$$

Ako uočimo da je $\varepsilon_0 S = C_0 d$ dobijamo konačni izraz:

$C_e = \dfrac{\varepsilon_r C_0 d}{d_1 + \varepsilon_r(d-d_1)}$ Konačni izraz ne zavisi od x!

177. $U_1 = 10$ V; $\varepsilon_r = 2{,}1$; $U_2 = ?$ i $\Delta U = ?$

Ovde je dati sistem kondenzatora odvojen od izvora napona. To znači da važi zakon održanja količine elektriciteta. (Što se zateklo u sistemu ostaje u njemu – nema kud). Plan rešavanja je izračunavanje količine elektriciteta u sistemu, u prvom i drugom slučaju.

Prvo imamo pet redno vezanih kondenzatora sa dielektrikom između: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$

Kapacitet pet istih redno vezanih kondenzatora u **prvom slučaju** je:

$\frac{1}{C_{e1}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{Ce1} = \frac{5}{C} \Rightarrow C_{e1} = \frac{C}{5}$ količina elektriciteta je $q_1 = \frac{C}{5} U_1$

Kada iz kondenzatora istekne dielektrik kapacitet se smanji ε_r puta: $C = \varepsilon_r C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{C}{\varepsilon_r}$

Ako iz tri kondenzatora istekne dielektrik kapacitet će biti:

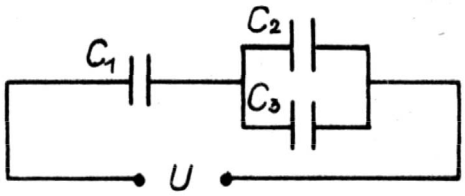
$\frac{1}{C_{e2}} = \frac{2}{C} + \frac{3}{C_0} = \frac{2}{C} + \frac{3\varepsilon_r}{C} \Rightarrow \frac{1}{C_{e2}} = \frac{2+3\varepsilon_r}{C} \Rightarrow C_{e2} = \frac{C}{2+3\varepsilon_r}$ količina elektriciteta u **drugom slučaju**:

$q_2 = \frac{C}{2+3\varepsilon_r} U_2$

Po zakonu održanja količine elektriciteta $q_1 = q_2$ tj. $\frac{C}{5} U_1 = \frac{C}{2+3\varepsilon_r} U_2$; Odavde je

$U_2 = \frac{2+3\varepsilon_r}{5} U_1 \Rightarrow U_2 = \frac{2+3*2{,}1}{5} 10V = 16{,}6\ V$. Razlika je **ΔU = 6,6 V.**

178. $C_1 = 1$ μF; $C_2 = 2$ μF; $C_3 = 3$ μF; U = 12 V, $q_1 = ?$; $q_2 = ?$; $q_3 = ?$



uz zadatak 178

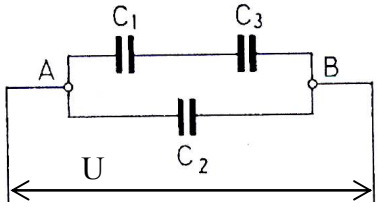
Pošto je dat napon na celoj šemi, izračunaćemo kapacitet cele šeme tj, ekvivalentni kapacitet.
C_2 i C_3 su vezani paralelno: $C_{2,3} = C_2 + C_3 = 5$ μF.
C_1 i $C_{2,3}$ su vezani redno:

$$Ce = \frac{C_1 C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}} = \frac{1*5}{1+5}[\mu F] = \frac{5}{6}\mu F$$

Ukupna količina elektriciteta je $q_e = C_e U = 10$ μC.
Tolika je i na prvom kondenzatoru na osnovu redna veze **q_1 = 10 μC**.

Napon na prvom kondenzatoru iznosi: $U_1 = \frac{q_1}{C_1} = 10V$. Znači napon na paralelnoj vezi je $U_{2,3} = 2$ V. (Još jednom, on je isti za oba kondenzatora)
$q_2 = C_2 U_{2,3} = 2$ μF∗2 V = **4 μC**. $q_3 = 3$ μF∗2V = **6 μC.** (Zapazite da to daje ukupno 10 μC)

179. $C_1 = 1$ μF; $C_2 = 2$ μF; $C_3 = 3$ μF; U = 12 V, $q_1 = ?$; $q_2 = ?$; $q_3 = ?$



uz zadatak 179

Kondenzator C_2 je pod naponom u i tu odmah možemo izračunati naelektrisanje: $q_2 = C_2 U \Rightarrow q_2 = 2$ μF∗12 V = **24 μC.**
I gornja grana je pod istim naponom. Njen ekvivalentni kapacitet je:

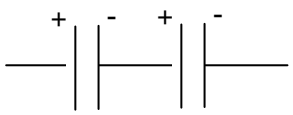
$$C_{1,3} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = 0{,}75\,\mu F.$$

Sada je $q_{1,3} = C_{1,3} U = 0{,}75$ μF∗12 V = 9 μC. To znači (zbog redne veze) da je $q_1 = q_3$ = **9 μC.**
Raspodela napona u gornjoj grani je:

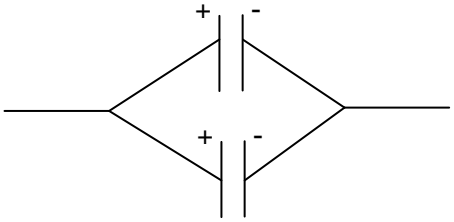
$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{9\mu C}{1\mu F} = 9V$; znači, $U_3 = U - U_1 = 3$ V.

180. S = 100 cm^2, d = 5 cm, ε_0 = 8,85*10^{-12} F/m; C = ?

Pre rešavanja pogledajte rednu i paralelnu vezu kondenzatora:

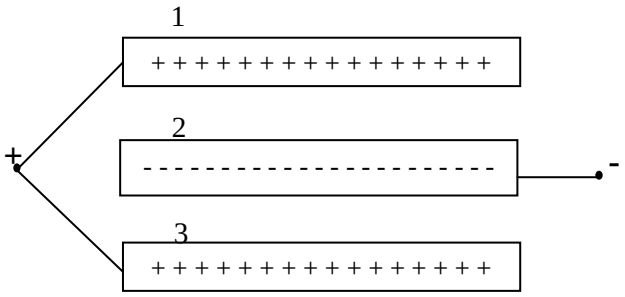


Kod redne veze spaja se + ploča i - ploča



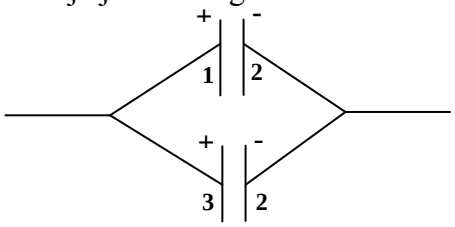
Kod paralelne veze spajaju se istoimene ploče, + i + - i -

Naša šema izgleda ovako:



Uz zadatak 180

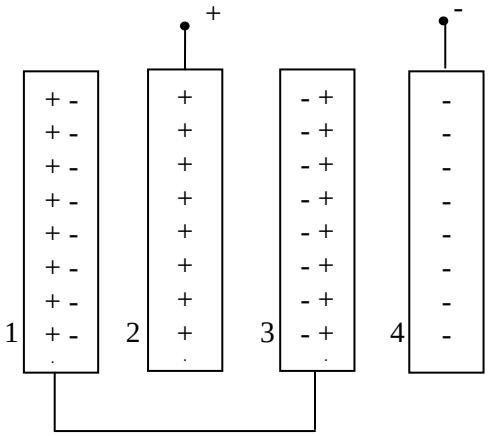
Imamo dva kondenzatora 1 – 2 i 2 – 3;
Ploča 2 učestvuje u oba kondenzatora, a naelektrisana je jednom vrstom naelektrisanja (ova primedba biće jasnija u naredna dva zadatka). Znači u pitanju je paralelna veza.
Ovo je jedino moguća slika:



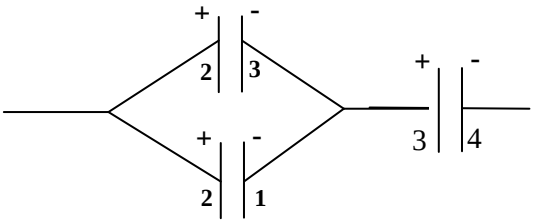
$$C_{EKV} = 2\varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad C_{EKV} = 2*10^{-12}\frac{100*10^{-4}}{5*10^{-2}}\left[\frac{F}{m}\frac{m^2}{m}\right] = \mathbf{3{,}54*10^{-12}\,F = 3{,}54\ pF.}$$

181. Rešenje:

Nacrtaćemo raspored naelektrisanja na pločama. Na pločama koje nisu naelektrisane izvršiće se preraspodela naelektrisanja kao na slici.
Imamo tri kondenzatora 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4;
Ploča 2 učestvuje u dva kondenzatora a naelektrisana je jednom vrstom naelektrisanja. Ta ploča je deo kondenzatora koji pripada paralelnoj vezi.
Znači kondenzatori 1 – 2; i 2 – 3; su paralelno vezani.
3 i 4 pripadaju rednoj vezi jer su vezani + i - .
Šema koja ispunjava date uslove izgleda ovako:



Uz zadatak 181

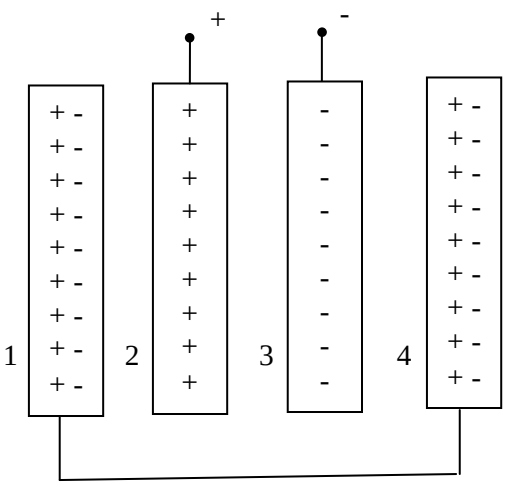


Uz zadatak 181

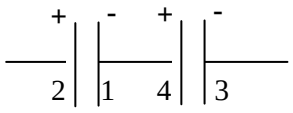
$$C_{EKV} = \frac{2C*C}{2C+c} = \frac{2}{3}C = \mathbf{\frac{2}{3}\varepsilon_0\frac{S}{d}}$$

182.

Opet slična priča:
Nacrtaćemo raspored naelektrisanja na pločama. Na pločama koje nisu naelektrisane izvršiće se preraspodela naelektrisanja kao na slici.
Imamo tri kondenzatora 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4;
Ploče 2 i 3 učestvuje u dva kondenzatora a naelektrisane su jednom vrstom naelektrisanja. Te ploče su deo kondenzatora koji pripada paralelnoj vezi.
Ploče 1 i 4 su spojene kao + i -. Znači kondenzatori 1 – 2 i 3 – 4 su vezani redno.

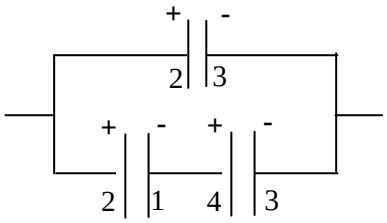


Uz zadatak 182



(počinjemo od + ploče)

2 i 3 su delovi paralelne veze kondenzatora. Kompletna šema bi izgledala ovako:

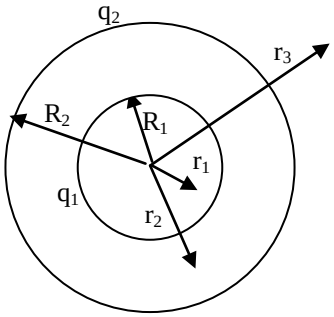


Uz zadatak 182

$$C_{EKV} = \frac{C}{2} + C = \frac{3}{2}C = \mathbf{\frac{3}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

183. Rešenje:

R_1 = 0,04 m, R_2 = 0,1 m, r_1 = 0,03 m, r_2 = 0,06 m, r_3 = 0,12 m, q_1 = 20 nC, q_2 = 70 nC, E_i = ?, φ_i = ?
Električno polje izračunavamo da bi obnovili znanje iz prethodno navedenog zadatka (154).
$E_1(r_1) = 0$ unutar svih sfera
Na rastojanju r_2 postoji polje samo od unutrašnje sfere, od spoljašnje je i dalje nula.
Na rastojanju r_3 postoji polje od obe sfere.



$$E_2 = k\frac{q_1}{r_2^2} = 9*10^9\,\frac{2*10^{-9}}{0{,}06^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = \mathbf{50\,000\,\frac{N}{C} = 5*10^4\,\frac{N}{C}}$$

$$E_3 = k\frac{q_1+q_2}{r_3^2} = 9*10^9\,\frac{90*10^{-9}}{0{,}12^2}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m^2}\right] = \mathbf{56\,250\,\frac{N}{C}}$$

Potencijali:
Unutar obe sfere (**pa i na rastojanju r_1**) kao ina površinama sfera:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{R_1} + k\frac{q_2}{R_2} = 9*10^9\,\frac{20*10^{-9}}{0{,}04}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right] + 9*10^9\,\frac{70*10^{-9}}{0{,}1}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right]$$

$$\varphi = \mathbf{4\,500\ V + 6300\,V = 10\,800\ V}$$

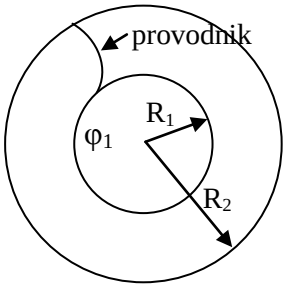
Na rastojanju r_2 :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{r_2} + k\frac{q_2}{R_2} = 9*10^9\,\frac{20*10^{-9}}{0{,}06}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right] + 6300V = 3000 + 6300V = \mathbf{9\,300\,V}$$

Na rastojanju r_3:

$$\varphi = k\frac{q_1 + q_2}{r_3} = 9*10^9\,\frac{90*10^{-9}}{0{,}12}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\frac{C}{m}\right] = \mathbf{6\,750\ V}$$

184. Rešenje: $R_1 = 0{,}05$ m, $\varphi_1 = 1000$ V, $R_2 = 0{,}1$ m, $\varphi_1' = ?$



Prvo ćemo iz potencijala izračunati naelektrisanje kugle:

$$\varphi_1 = k\frac{q}{R_1} \Rightarrow q = \frac{\varphi_1 R_1}{k}$$

Nije potrebno izračunavati brojnu vrednost

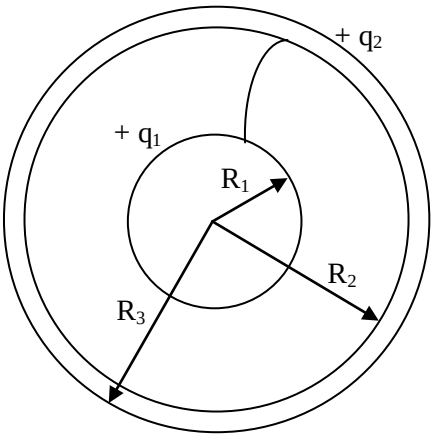
Ako kuglu spojimo provodnikom sa ljuskom, naelektrisanje će preći na ljusku (**naelektrisanju beži na površinu**). Sada će kugla biti naelektrisana naelektrisanjem q. Njen potencijal iznosi:

$$\varphi_{LJUSKE} = k\frac{q}{R_2} = k\frac{\frac{\varphi_1 R_1}{k}}{R_2} \Rightarrow \varphi_{\mathbf{LJUSKE}} = \varphi_{\mathbf{1}}\frac{\mathbf{R_1}}{\mathbf{R_2}} = \mathbf{500\,V}$$

Toliki potencijal je i u celoj unutrašnjosti ljuske pa i na površini kugle.

Znači, **konačni potencijal kugle je 500 V.**

185. Rešenje:



Kada se spoji kugla sa ljuskom naelektrisanje q_1 "beži na površinu" tako da:

a) **naelektrisanje kugle je nula**

b) **naelektrisanje ljuske je $\mathbf{q_1 + q_2}$** (i to raspoređeno po spoljašnjoj površini ljuske, ovo zbog upotrebe poluprečnika R_3)

c) $\varphi = \mathbf{k}\dfrac{\mathbf{q_1 + q_2}}{\mathbf{R_3}}$

d) potencijal u celoj unutrašnjosti ljuske je isti kao na površini, znači toliki je i potencijal kugle, **razlika je nula.**

186. Rešenje:

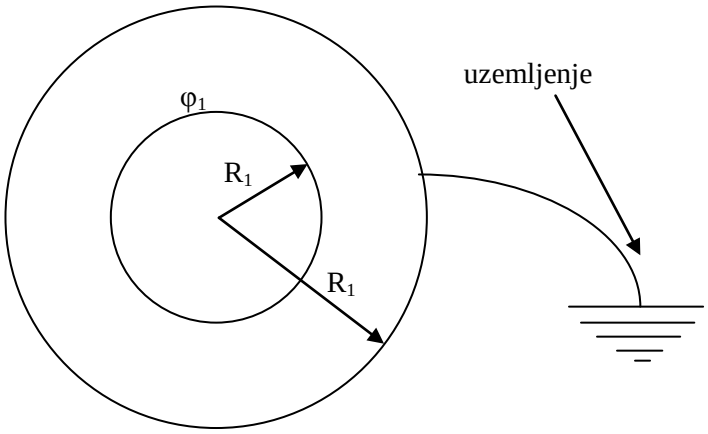
Iz potencijala treba izračunati naelektrisanje kugle:

$$\varphi_1 = k\frac{q}{R_1} \Rightarrow q = \frac{\varphi_1 R_1}{k}$$

Potencijal ljuske iznosi:

$$\varphi_2 = k\frac{q}{R_2} \Rightarrow \varphi_2 = k\frac{\frac{\varphi_1 R_1}{k}}{R_2} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1\frac{R_1}{R_2}$$

Ako je kugla uzemljena onda to znači, po definiciji, da je **njen potencijal nula**.



Uz zadatak 186

Iz zemlje će doći naelektrisanje q' da poništi već postojeći potencijal φ_2.

$\varphi_2 + \varphi' = 0 \Rightarrow \varphi' = -\varphi_2$

ili: $\varphi` = -\varphi_1 \dfrac{R_1}{R_2}$

φ' je potencijal na ljusci od naelektrisanja koje je došlo iz zemlje. Toliki je i potencijal u celoj unutrašnjosti ljuske. Taj potencijal se sabira sa već postojećim potencijalom kugle:

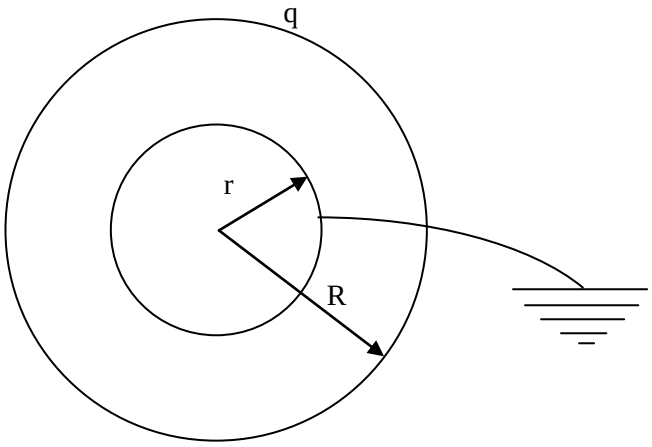
Konačni potecijal kugle je:

$$\varphi_{KON} = \varphi_1 + \varphi` = \varphi_1 - \varphi_1 \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_{KON} = \varphi_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)}$$

187. Rešenje:

Potencijal sferne ljuske, a i u celoj unutrašnjosti ljuske je:

$$\varphi = k\frac{q}{R}$$



Uz zadatak 187

Ovoliko iznosi i potencijal kugle pre uzemljenja. Zbog uzemljenja potencijal kugle je nula. Iz zemlje dolazi naelektrisanje q'da poništi postojeći potencijal kugle.

$\varphi + \varphi' = 0 \Rightarrow k\dfrac{q}{R} + k\dfrac{q`}{r} = 0 \Rightarrow q` = -q\dfrac{r}{R}$

Ovo naelektrisanje stvara dodatni potencijal na ljusci:

$$\varphi` = k\frac{q`}{R} = k\frac{-k\frac{r}{R}}{R} \Rightarrow \varphi` = -k\frac{qr}{R^2}$$

Ukupan potencijal na ljusci:

$$\varphi_{UK} = \varphi + \varphi` = k\frac{q}{R} - k\frac{qr}{R^2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_{UK} = k\frac{q}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$$

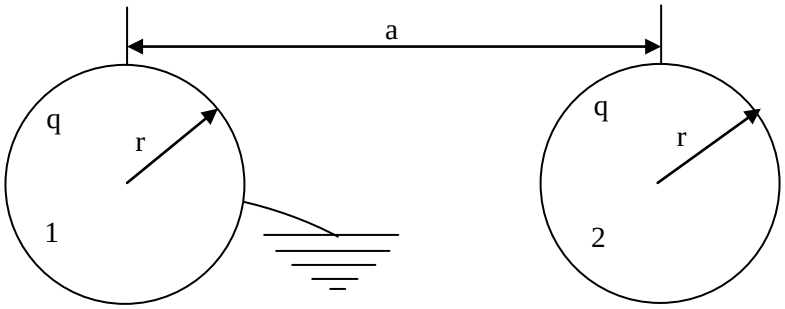
Jačina polja van ljuske na rastojanju R_1: ($R_1 > R$)

$$E = k\frac{q + q`}{R_1^2} = k\frac{q - q\frac{r}{R}}{R_1^2} = k\frac{q\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{R_1^2} \Rightarrow \boldsymbol{E = k\frac{q}{R_1^2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$$

188. Rešenje:

Potencijal uzemljene kugle je nula.
Druga kugla stvara na mestu prve kugle potencijal: $\varphi = k\frac{q}{a}$
Iz zemlje će doći naelektrisanje q'da poništi taj potencijal:
$\varphi + \varphi' = 0$

$$k\frac{q}{a} + k\frac{q_1'}{r} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{q_1' = -\frac{qr}{a}}$$



Uz zadatak 188

Sada se prva kugla "odzemi" pa druga uzemi.
Njen potencijal treba da bude nula.

Prva kugla stvara potencijal na mestu druge kugle: $\varphi_2 = k\frac{q_1'}{a} = -k\frac{qr}{a^2}$

Iz zemlje dolazi naelektrisanje q_2' koje ponoštava taj potencijal:

$\varphi_2 + \varphi_2' = 0 \quad \Rightarrow -k\frac{qr}{a^2} + k\frac{q_2'}{r} = 0 \qquad \boldsymbol{q_2' = \frac{qr^2}{a^2}}$

a) Potencijal prve kugle je:

$$\varphi_1 = k\frac{q_1'}{r} + k\frac{q_2'}{a} = k\frac{\frac{-qr}{a}}{r} + k\frac{\frac{qr^2}{a^2}}{a} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\varphi_1 = \frac{kq}{a}\left(-1 + \frac{r^2}{a^2}\right)}$$

b) Sada priču nastavimo:

Opet uzemimo prvu kuglu: potencijal treba da je nula, iz zemlje treba oa dođe naelektrisanje q_1''da poništi potencijal koji stvara druga kugla:

$\varphi_1'' + \varphi_2' = 0 \quad k\frac{q_1''}{r} + k\frac{q_2'}{a} = 0 \Rightarrow q_1'' = -\frac{q_2'r}{a} = -\frac{qr^2}{a^2}\frac{r}{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q_1'' = -q\frac{r^3}{a^3}}$

Sad druga kugla: $\varphi_2'' + \varphi_1'' = 0,\ k\frac{q_2''}{r} + k\frac{q_1''}{a} = 0 \ \Rightarrow$ (kao gore) $\quad \boldsymbol{q_2'' = q\frac{r^4}{a^4}}$

Može se zaključiti da će na prvoj kugli biti negativnu naelektrisanje sa neparnim stepenima, a na drugoj kugli pozitivno naelektrisanje sa parnim stepenima. Treba zapaziti da je posle druge serije "uzemljavanja" na drugoj kugli eksponent 4, posle n – tog uzemljavanja biće:

$$\boldsymbol{q_2 = q\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \qquad q_1 = -\,q\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1}}$$